

Unidad 2 - Modelado matemático

Fundamentos de Modelado Aeroespacial
Ingeniería Aeroespacial en Aeronavegación
Ingeniería Aeroespacial en Vehículos Aeroespaciales
Ingeniería Aeroespacial en Transporte y Aeropuertos

Profesores

Agustín Villa Ortiz Alejandro Sáez Mollejo

Curso 2020-2021



Universidad
Rey Juan Carlos

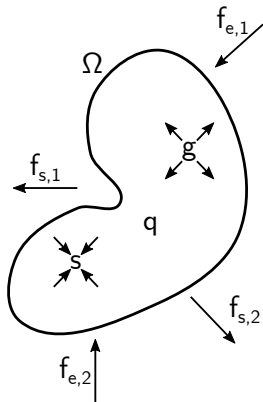
- 1 Leyes de conservación
- 2 Análisis de sistemas
- 3 Transformada de Laplace
- 4 Sistemas con varios grados de libertad
- 5 Sistemas discretos
- 6 Sistemas no lineales

- 1 Leyes de conservación
 - Expresión general
 - Variables conservativas

- Ciertas variables físicas se conservan, ni se generan ni destruyen

- Ciertas variables físicas se conservan, ni se generan ni destruyen
- Otras, en cambio, no se conservan

- Ciertas variables físicas se conservan, ni se generan ni destruyen
- Otras, en cambio, no se conservan



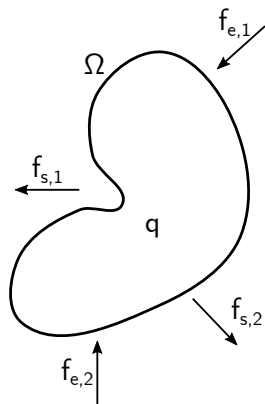
- Volumen de control V_C que contiene el sistema
- Las leyes de conservación se aplican en el V_C :

$$\frac{dq}{dt} = \sum_i f_{e,i} - \sum_j f_{s,j}$$

- Si la variable es no conservativa:

$$\frac{dq}{dt} = \sum_i f_{e,i} - \sum_j f_{s,j} + \sum_k g_k - \sum_l s_l$$

El balance de variables conservativas sólo considera términos de producción y disipación



$$\frac{dq}{dt} = \sum_i f_{e,i} - \sum_j f_{s,j}$$

$$\frac{dq}{dt} = \text{producción} - \text{disipación}$$

Estas variables están presentes en sistemas dinámicos:

- Cantidad de movimiento lineal y angular
- Carga eléctrica
- Masa
- Energía

Momento lineal

También llamado cantidad de movimiento, se define como:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Donde m es la masa del elemento, y \mathbf{v} su velocidad.

La variación de momento lineal es debida a las fuerzas aplicadas sobre la masa:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad (m \equiv cte)$$

A través de la conservación del momento, se puede estudiar la posición de los elementos del sistema



Conservación de momento angular

Momento angular

Análogo al momento lineal, se define como:

$$\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Donde I es el momento de inercia, $\boldsymbol{\omega}$ su velocidad de rotación, \mathbf{r} la posición del elemento y \mathbf{p} su momento lineal con respecto el origen de rotación.

La variación de momento angular es debida a los momentos aplicados sobre el eje de giro:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (I \cdot \boldsymbol{\omega}) + \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \sum_i \mathbf{M}_i$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (I \equiv cte, \mathbf{r} \times \mathbf{p} = 0)$$

A través de la conservación del momento, se puede estudiar el giro del sistema

Expresión válida para rotaciones en un plano.

Carga eléctrica

La carga eléctrica Q en un nodo con potencial eléctrico V , se define como:

$$Q = C \cdot V$$

Donde C es la capacitancia en dicho punto.

La acumulación de carga en un nodo depende de las corrientes que pasan por él:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (C \cdot V) = \sum_j i_j$$

Masa

Magnitud física que indica la cantidad de materia:

$$m = \rho \cdot V$$

Donde ρ es la densidad del material y V el volumen que ocupa.

La variación de masa en un punto depende de los gastos másicos que pasan por él:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho \cdot V) = \frac{d\rho}{dt} V + \rho \frac{dV}{dt} = \sum_i \dot{m}_i$$

Energía

Capacidad de realizar un trabajo. Por unidad de volumen, la energía de un partícula se define como:

$$e = p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + c_v T$$

Donde p es la presión en dicho punto, g la aceleración de la gravedad y c_v la capacidad específica del material a volumen constante.

La variación de energía de un sistema es igual a los flujos de calor y de trabajo a los que se somete:

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt} \left(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + c_v T \right) = \sum_i \dot{q}_i - \sum_j \dot{w}_j$$

- 2** Análisis de sistemas
 - Semejanza de sistemas
 - Esfuerzos y flujos
 - Símil con circuito eléctrico
 - Parámetros concentrados
 - Ejemplo de sistema

- En un volumen de control, la ley de conservación de una variable conservativa se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \text{variable} = \sum \text{flujos}$$

independientemente del tipo de sistema dinámico

- Se puede establecer una semejanza entre sistemas físicos de distinta naturaleza si se emplean las variables adecuadas: esfuerzos y flujos

$$\frac{d}{dt} \text{flujo} = \sum \text{esfuerzos}$$

- Esfuerzo: fuerza aplicada para producir un flujo
- Flujo: variación instantánea de una variable del sistema

Aplicando una analogía a un sistema mecánico lineal:

	Flujo f	Esfuerzo e	Desplazamiento q	Cantidad de movimiento p
Mecánico lineal	Vel. lineal v	Fuerza F	Posición x	C. de mov. lineal p
Mecánico angular	Vel. angular ω	Momento M	Giro θ	C. de mov. angular L
Eléctrico	Intensidad i	Voltaje V	Carga eléctrica Q	-
Fluido	Gasto másico \dot{m}	Presión p	Masa m	C. de mov. de un flujo Γ
Térmico	Flujo de calor q	Temperatura T	-	-

Donde:

$$f = \frac{dq}{dt} \quad e = \frac{dp}{dt}$$

Las ecuaciones de conservación poseen una serie de esfuerzos que modifican su *cantidad de movimiento*

Los elementos de un sistema se caracterizan por su esfuerzo asociado.

- Disipativos: disipación de energía por la presencia del flujo, como amortiguadores, resistencias eléctricas, pérdidas en inst. fluidas

$$e = Cf$$

- Capacitivos: almacenan energía dado un desplazamiento en el elemento, como resortes, condensadores, efectos de compresibilidad o capacidad calorífica

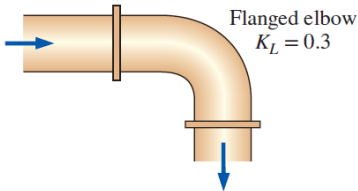
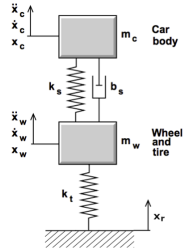
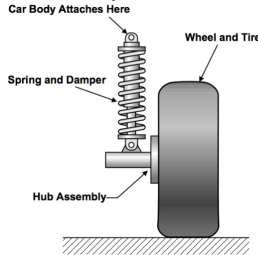
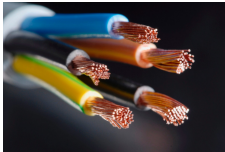
$$e = C \int f dt \approx Cq$$

- Inductivos: energía asociada al flujo en el elemento, como masas o inercias, bobinas... y la almacenan en base a la expresión

$$e = C \frac{df}{dt}$$

Parámetros concentrados

Algunos elementos se pueden agrupar, reduciendo la complejidad del sistema. Sus propiedades se resumen en parámetros concentrados.



Los elementos se descomponen en otros más sencillos o incluso parámetros



Usado para medir fuerzas (o masa, de forma indirecta). Al colgar una masa:

- Comportamiento causado por esfuerzos



Usado para medir fuerzas (o masa, de forma indirecta). Al colgar una masa:

- Comportamiento causado por esfuerzos
- Muelle: oscilaciones



Usado para medir fuerzas (o masa, de forma indirecta). Al colgar una masa:

- Comportamiento causado por esfuerzos
- Muelle: oscilaciones
- Disipación: oscilaciones se detienen



Usado para medir fuerzas (o masa, de forma indirecta). Al colgar una masa:

- Comportamiento causado por esfuerzos
- Muelle: oscilaciones
- Disipación: oscilaciones se detienen
- Masa: almacena energía



Usado para medir fuerzas (o masa, de forma indirecta). Al colgar una masa:

- Comportamiento causado por esfuerzos
- Muelle: oscilaciones **capacitivo**
- Disipación: oscilaciones se detienen **disipativo**
- Masa: almacena energía **inductivo**

Ejemplo de sistema: dinamómetro



Usado para medir fuerzas (o masa, de forma indirecta). Al colgar una masa:

- Comportamiento causado por esfuerzos
- Muelle: oscilaciones **capacitivo**
- Disipación: oscilaciones se detienen **disipativo**
- Masa: almacena energía **inductivo**

Tras su desarrollo matemático, la posición de la masa se obtiene a partir de la EDO de segundo orden:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} + bv + k \int v dt &= 0 \\ m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

sin olvidarnos de las condiciones iniciales

- 3** Transformada de Laplace
 - Definición
 - Propiedades
 - Respuesta de sistemas dinámicos

Transformada de una función del dominio temporal

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \forall t \geq 0$$

al dominio de la frecuencia, donde s es una variable compleja
 $s = \sigma + i\omega$.



Ventajas

- Paso de EDO a polinomio
- Las transformadas más empleadas están tabuladas
- Facilita el diseño y análisis de sistemas y controladores

Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} = F(s) &= \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} -se^{-st} dt = \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

Por analogía:

$$\mathcal{L}\{a\} = F(s) = \frac{a}{s}$$

$$\mathcal{L}\{0\} = F(s) = 0$$

Definición : cálculo de $\mathcal{L}\{t\}$

Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = t$

$$\mathcal{L}\{t\} = F(s) = \int_0^{\infty} te^{-st} dt$$

$$u = t; dv = e^{-st} dt \rightarrow du = dt; v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} te^{-st} dt &= \left[-\frac{t}{s}e^{-st} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s}e^{-st} dt = \\ &= [0 - 0] + \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Calcula la transformada de Laplace de $f(t) = t^n$

La **función de Heaviside** o escalón unidad se define como:

$$H(t - c) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

Calcula $\mathcal{L}\{H(t - c)\}$ ¡Piénsalo un poco! Utiliza el ejemplo de $f(t) = 1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t - c)\} = F(s) &= \int_c^{\infty} 1e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \int_c^{\infty} -se^{-st} dt = \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_c^{\infty} = \frac{e^{-sc}}{s} \end{aligned}$$

La función delta de Dirac o impulso se define como:

$$\delta(t - c) = \begin{cases} \infty & t = c \\ 0 & t \neq c \end{cases}$$

cumpliendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - c) dt = f(c)$$

Calcula $\mathcal{L} \{ \delta(t - c) \}$

$$\mathcal{L} \{ \delta(t - c) \} = F(s) = \int_0^{\infty} \delta(t - c) e^{-st} dt = e^{-cs}$$

La transformada de funciones típicas en el modelado de sistemas son:

Señal	$f(t)$	$F(s)$
Constante	C	$\frac{C}{s}$
Rampa	t	$\frac{1}{s^2}$
Escalón (Heaviside)	$H(t - c) \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$	$\frac{e^{-sc}}{s}$
Impulso (Dirac)	$\delta(t - c) \begin{cases} \infty & t = c \\ 0 & t \neq c \end{cases}$	e^{-cs}

Para seguir practicando:

Ejercicios

1 $\mathcal{L} \{e^{-t}\}$

2 $\mathcal{L} \{Ae^{at}\}$

3 $\mathcal{L} \{\sin(at)\}$

4 $\mathcal{L} \{\cos(at)\}$

5 $\mathcal{L} \{e^{iat}\}$

Para el cálculo de las transformadas es habitual apoyarse en las tablas de transformadas:

Función $f(t)$	Transformada $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	
1	$\frac{1}{s}$	$Re(s) > 0$
e^{-zt}	$\frac{1}{s+z}$	$Re(s) > -Re(z)$
$t^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$Re(s) > 0$
$t^n e^{-zt} \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{(s+z)^{n+1}}$	$Re(s) > -Re(z)$
$\sin zt$	$\frac{z}{s^2+z^2}$	$Re(s) > Im(z) $
$\cos zt$	$\frac{s}{s^2+z^2}$	$Re(s) > Im(z) $

...

Linealidad

Si a y b son constantes:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

Desplazamiento en frecuencias

Los desplazamientos en la escala de la frecuencia se relacionan con multiplicación por exponenciales en el plano del tiempo:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s + a)$$

Cambio en escala de tiempo

Si la escala temporal se dilata, la transformada de Laplace se contrae en magnitud y frecuencia:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Desplazamiento temporal

Si la función se mueve en la escala temporal una cantidad c :

$$\mathcal{L}\{f(t - c)\} = e^{-cs} F(s)$$

Integral

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

Teorema del valor inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Teorema del valor final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Transformada de derivada de f de orden n

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)\end{aligned}$$

Esta propiedad permitirá resolver EDOs de manera mucho más sencilla

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{\dot{f}\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{\ddot{f}\} = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

- Un sistema de orden n se define con la EDO:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = f(t)$$

cuya solución se puede expresar como

$$x(t) = x_{est}(t) + x_{trans}(t)$$

donde $x_{trans}(t \rightarrow \infty) = 0$, independientemente de la fuerza $f(t)$

- Si $f(t) = 0$, el sistema actúa libremente (EDO homogénea)
- Si $f(t) \neq 0$, el sistema está forzado (EDO particular)
- $f(t)$ fuerza al sistema a alcanzar un valor estacionario determinado cuando $t \rightarrow \infty$

- Un sistema de orden n se define con la EDO:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = f(t)$$

cuya solución se puede expresar como

$$x(t) = x_{est}(t) + x_{trans}(t)$$

donde $x_{trans}(t \rightarrow \infty) = 0$, independientemente de la fuerza $f(t)$

- Si $f(t) = 0$, el sistema actúa libremente (EDO homogénea)
- Si $f(t) \neq 0$, el sistema está forzado (EDO particular)
- $f(t)$ fuerza al sistema a alcanzar un valor estacionario determinado cuando $t \rightarrow \infty$ **ENTRADA DEL SISTEMA**



$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \tau s X(s) - \tau x_0 + X(s) = F(s)$$

$$(\tau s + 1) X(s) = F(s) + \tau x_0 \Rightarrow X(s) = \frac{1}{\tau s + 1} (F(s) + \tau x_0)$$

$\tau \equiv$ tiempo característico del sistema

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \equiv \text{función de transferencia del sistema}$$

La solución se obtiene mediante la anti-transformada de Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{X(s)\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \{H(s)F(s)\}}_{\text{respuesta forzada}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \{H(s)\tau x_0\}}_{\text{respuesta libre}}$$

Usando las tablas de conversión:

$$x(t) =$$



$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \tau s X(s) - \tau x_0 + X(s) = F(s)$$

$$(\tau s + 1) X(s) = F(s) + \tau x_0 \Rightarrow X(s) = \frac{1}{\tau s + 1} (F(s) + \tau x_0)$$

$\tau \equiv$ tiempo característico del sistema

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \equiv \text{función de transferencia del sistema}$$

La solución se obtiene mediante la anti-transformada de Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{X(s)\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \{H(s)F(s)\}}_{\text{respuesta forzada}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \{H(s)\tau x_0\}}_{\text{respuesta libre}}$$

Usando las tablas de conversión:

$$x(t) = \quad \quad \quad + e^{-t/\tau} x_0$$



$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \tau s X(s) - \tau x_0 + X(s) = F(s)$$

$$(\tau s + 1) X(s) = F(s) + \tau x_0 \Rightarrow X(s) = \frac{1}{\tau s + 1} (F(s) + \tau x_0)$$

$\tau \equiv$ tiempo característico del sistema

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \equiv \text{función de transferencia del sistema}$$

La solución se obtiene mediante la anti-transformada de Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{X(s)\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \{H(s)F(s)\}}_{\text{respuesta forzada}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \{H(s)\tau x_0\}}_{\text{respuesta libre}}$$

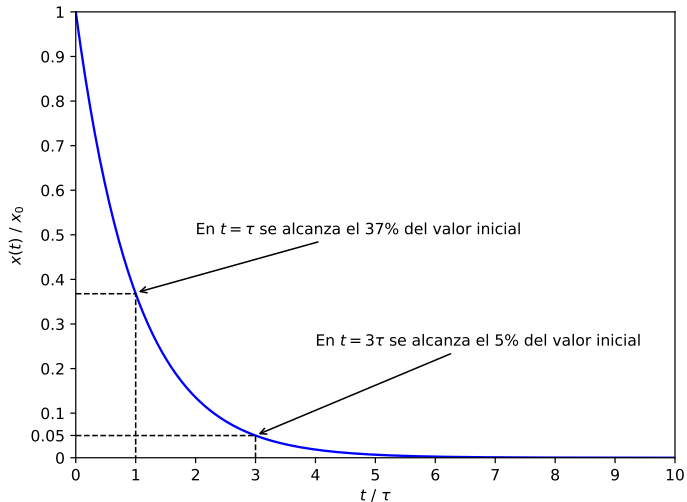
Usando las tablas de conversión:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)F(s)\} + e^{-t/\tau} x_0$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\tau s + 1} F(s) \right\} + e^{-t/\tau} x_0$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\tau s + 1} F(s) \right\} + e^{-t/\tau} x_0$$

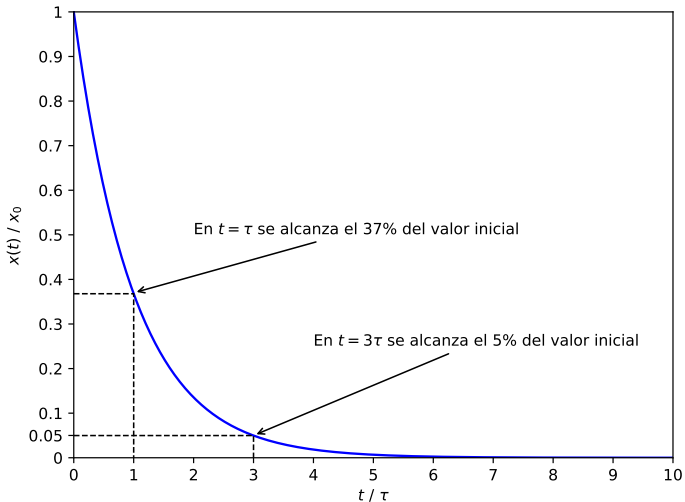
~~$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\tau s + 1} F(s) \right\} + e^{-t/\tau} x_0$$~~



Respuesta libre de primer orden

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\tau s + 1} F(s) \right\} + e^{-t/\tau} x_0$$

La señal dura más tiempo al incrementar τ



$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\tau s + 1} F(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) F(s) \}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\tau s + 1} F(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) F(s) \}$$

La respuesta del sistema depende de $f(t)$:

	$F(s)$	$H(s) F(s)$	$x(t)$
Impulso	A	$\frac{A}{\tau s + 1}$	
Escalón	$\frac{A}{s}$	$\frac{A}{s(\tau s + 1)}$	
Rampa	$\frac{A}{s^2}$	$\frac{A}{s^2(\tau s + 1)}$	

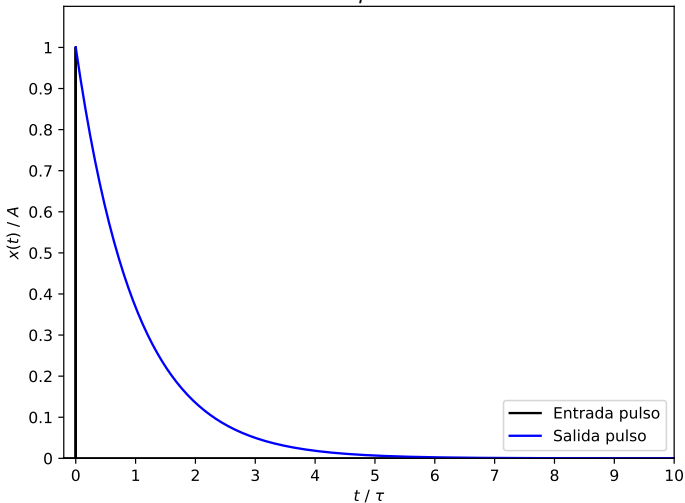
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\tau s + 1} F(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) F(s) \}$$

La respuesta del sistema depende de $f(t)$:

	$F(s)$	$H(s) F(s)$	$x(t)$
Impulso	A	$\frac{A}{\tau s + 1}$	$\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}$
Escalón	$\frac{A}{s}$	$\frac{A}{s(\tau s + 1)}$	$A(1 - e^{-t/\tau})$
Rampa	$\frac{A}{s^2}$	$\frac{A}{s^2(\tau s + 1)}$	$A[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})]$

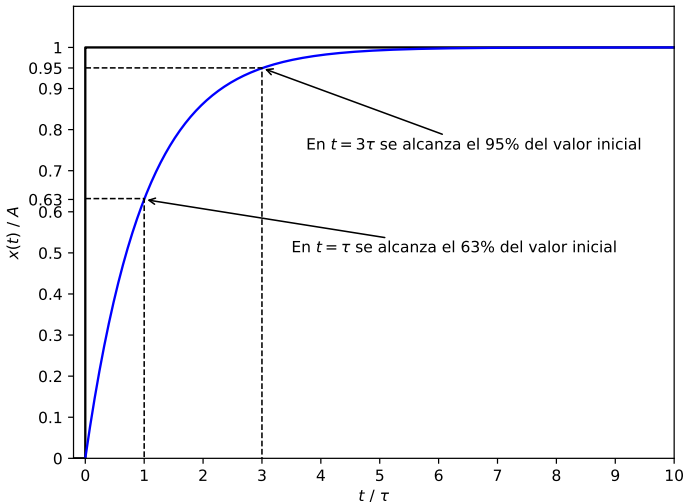
$$x(t) = \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$x(t) = \frac{A}{\tau} e^{-t/\tau}$$



$$x(t) = A \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

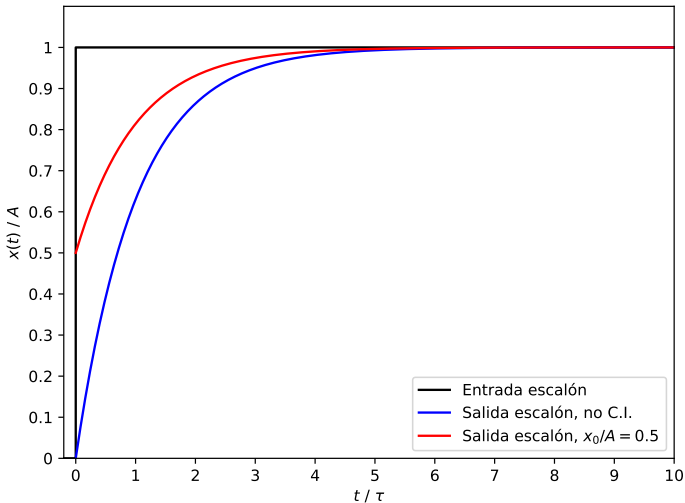
$$x(t) = A \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$



$$x(t) = A \left(1 - e^{-t/\tau} \right) + e^{-t/\tau} x_0$$

Respuesta a escalón con C.I.

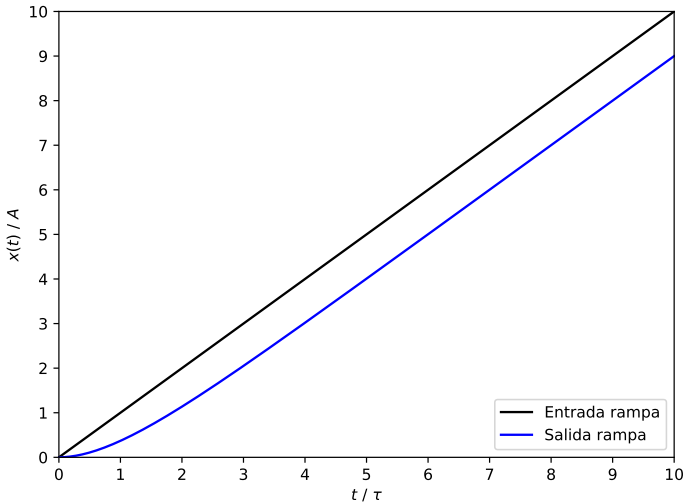
$$x(t) = A \left(1 - e^{-t/\tau} \right) + e^{-t/\tau} x_0$$



$$x(t) = A \left[t - \tau \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \right]$$

Respuesta a rampa de primer orden

$$x(t) = A \left[t - \tau \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \right]$$





$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) X(s) = F(s) + (s + 2\zeta\omega_n) x_0 + \dot{x}_0$$

$\omega_n \equiv$ frecuencia natural del sistema
 $\zeta \equiv$ amortiguamiento del sistema

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \equiv \text{función de transferencia del sistema}$$

La solución se obtiene mediante la anti-transformada de Laplace:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{X(s)\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \{H(s)F(s)\}}_{\text{respuesta forzada}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \{H(s)[(s + 2\zeta\omega_n) x_0 + \dot{x}_0]\}}_{\text{respuesta libre}}$$

$$x(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} F(s) \right\}}_{\text{respuesta forzada}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x_0 + \dot{x}_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right\}}_{\text{respuesta libre}}$$

En los sistemas de segundo orden aparecen dos coeficientes:

- Frecuencia natural ω_n [rad/s], a la cual $x(t)$ fluctúa si no existe amortiguamiento.
- Coeficiente de amortiguamiento ζ [–], reduciendo la magnitud de las oscilaciones de $x(t)$ hasta alcanzar el régimen estacionario.
 - Si $\zeta = 0$, el sistema no está amortiguado
 - Si $0 < \zeta < 1$, el sistema está subamortiguado
 - Si $\zeta = 1$, el sistema está amortiguado (amortiguamiento crítico)
 - Si $\zeta > 1$, el sistema está sobreamortiguado

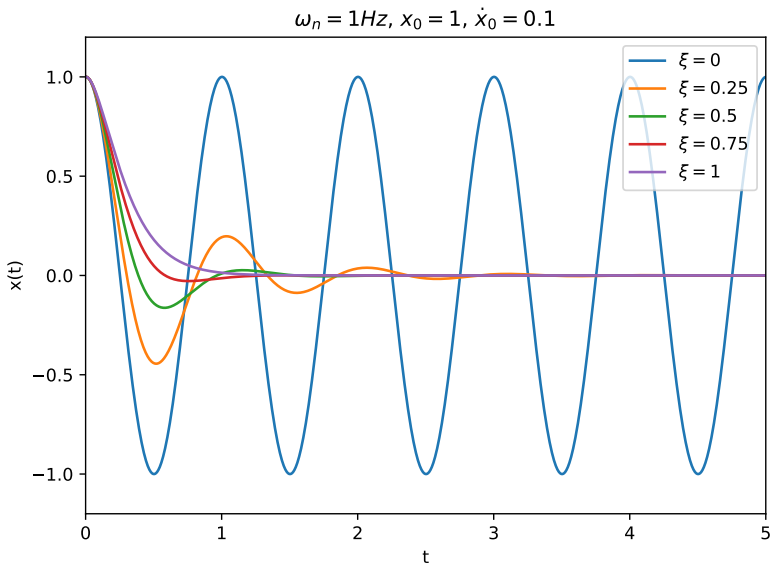
La respuesta depende del valor del amortiguamiento

$$x(t)_{\text{libre}} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s + 2\zeta\omega_n)x_0 + \dot{x}_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) [(s + 2\zeta\omega_n)x_0 + \dot{x}_0] \}$$

$$\begin{cases} \zeta = 0 & x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \\ 0 < \zeta < 1 & x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \\ \zeta = 1 & x(t) = e^{-\omega_n t} [x_0(1 + \omega_n t) + \dot{x}_0 t] \\ \zeta > 1 & x(t) = \frac{ax_0 + \dot{x}_0}{a - b} e^{-bt} - \frac{bx_0 + \dot{x}_0}{a - b} e^{-at} \end{cases}$$

- $a, b = \zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$ son los polos de $H(s)$ (raíces del denominador)
- $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la frecuencia de oscilación amortiguada

Respuesta libre de segundo orden



La respuesta depende del valor del amortiguamiento y la variable de entrada

$$x(t)_{forzada} = \mathcal{L}^{-1} \{H(s) F(s)\}$$

	$F(s)$	$H(s) F(s)$	$x(t)$
Impulso	A	$\frac{A}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	
Escalón	$\frac{A}{s}$	$\frac{A}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	

La respuesta depende del valor del amortiguamiento y la variable de entrada

$$x(t)_{forzada} = \mathcal{L}^{-1} \{H(s) F(s)\}$$

	$F(s)$	$H(s) F(s)$	$x(t)$
Impulso	A	$\frac{A}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	Respuesta libre con $x_0 = 0, \dot{x}_0 = A$
Escalón	$\frac{A}{s}$	$\frac{A}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	

La respuesta depende del valor del amortiguamiento y la variable de entrada

$$x(t)_{forzada} = \mathcal{L}^{-1} \{H(s) F(s)\}$$

	$F(s)$	$H(s) F(s)$	$x(t)$
Impulso	A	$\frac{A}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	Respuesta libre con $x_0 = 0, \dot{x}_0 = A$
Escalón	$\frac{A}{s}$	$\frac{A}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$...

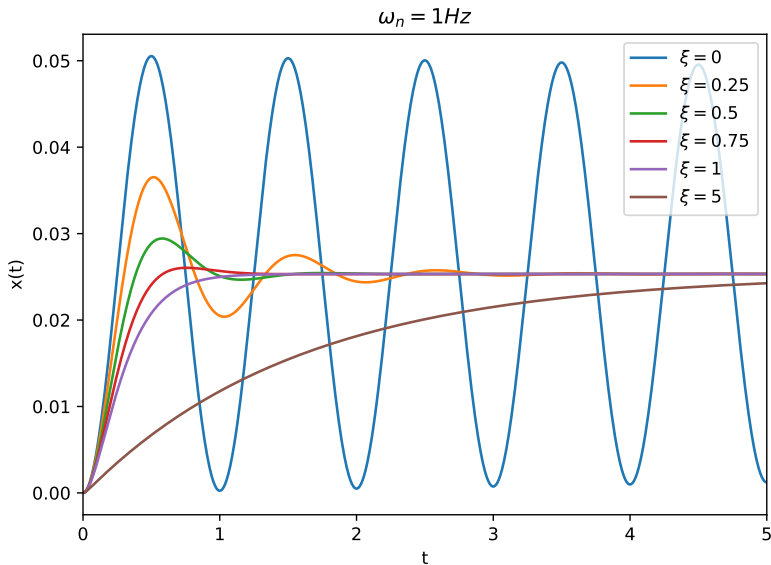
La respuesta depende del valor del amortiguamiento

$$x(t)_{forzada} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \zeta = 0 & x(t) = \frac{A}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n t)) \\ 0 < \zeta < 1 & x(t) = \frac{A}{\omega_n^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \cos^{-1} \zeta) \right] \\ \zeta = 1 & x(t) = \frac{A}{\omega_n^2} [1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)] \\ \zeta > 1 & x(t) = \frac{A}{ab} \left(1 - \frac{be^{-at}}{b-a} + \frac{ae^{-bt}}{b-a} \right) \end{array} \right.$$

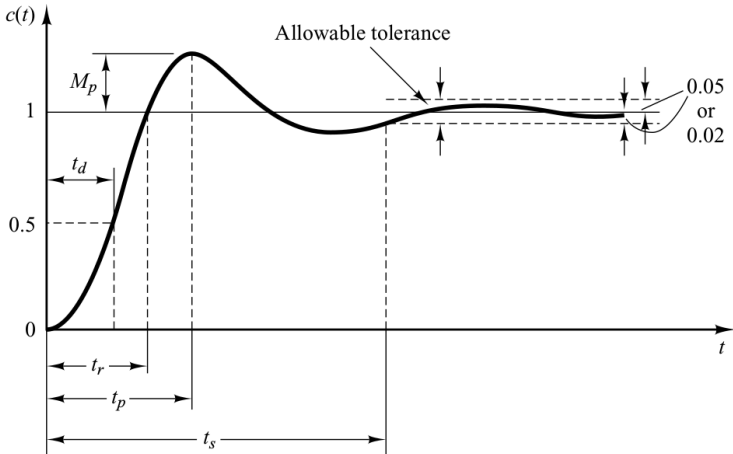
- $a, b = \zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}$ son los polos de $H(s)$ (raíces del denominador)
- $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ es la frecuencia de oscilación amortiguada

Respuesta a escalón de segundo orden



Respuesta a escalón de segundo orden

La respuesta del sistema queda determinada por una serie de parámetros:



- t_d ó $t_{1/2}$: retardo (delay time). Tiempo en alcanzar la mitad del valor estacionario por primera vez.
- t_r : tiempo de subida (rise time). Tiempo para alcanzar el valor de la entrada. En sistemas sobreamortiguados, tiempo en pasar del 10 % al 90 % del valor estacionario.
- t_p : tiempo de pico (peak time). Tiempo para alcanzar el primer pico en sistemas subamortiguados.
- M_p : sobrepaso máximo (overshoot). Cantidad en la que se excede el valor estacionario.
- t_s : tiempo de establecimiento (setting time). Tiempo necesario para que el sistema permanezca en torno a un porcentaje (2 % o 5 %) del valor estacionario.

- 4** Sistemas con varios grados de libertad
 - Espacio de estados
 - Sistemas lineales invariantes

El modelo matemático de un sistema de segundo orden tiene la forma:

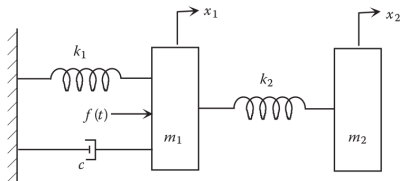
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f(t)$$

donde x es el único grado de libertad del sistema. Generalizando para casos con más de un grado de libertad:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$$

Donde

- M : matriz de masas
- C : matriz de amortiguamiento
- K : matriz de rigidez
- \mathbf{x} : vector de grados de libertad del sistema / espacio de estados
- \mathbf{F} : vector de esfuerzos externos



$$m_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = f(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0$$

Definiendo $\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$, $\mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$, el sistema se escribe como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t)$$

La formulación de un sistema de varios grados de libertad

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t)$$

se puede emplear para generar un sistema de EDOs de primer orden:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Ventajas

- Facilita el análisis, simulación y control de un sistema
- Es más conveniente para el cálculo numérico

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$$

Reducida a un sistema de primer orden:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ x \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a\dot{x}_1 + bx_1 + cx_2 = f(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -b/a & -c/a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/a \\ 0 \end{bmatrix} \{f(t)\}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$m_1 \ddot{x}_a + c \dot{x}_a + k_1 x_a - k_2 (x_b - x_a) = f(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_b + k_2 (x_b - x_a) = 0$$

Reducida a un sistema de primer orden:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_a \\ x_a \\ \dot{x}_b \\ x_b \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -c/m_1 & -(k_1 + k_2)/m_1 & 0 & k_2/m_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2/m_2 & 0 & -k_2/m_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/m_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{f(t)\}$$

Transformación de EDO de segundo orden de coeficientes constantes a un sistema de EDOs de primer orden de coeficientes constantes.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Esta representación en *forma canónica* se llama representación en el espacio de estados del sistema. Si hay n estados y r entradas:

- $\mathbf{A}(n \times n)$ es la matriz del sistema: determina la respuesta libre.
- $\mathbf{B}(n \times r)$ es la matriz de control determina la respuesta forzada.
- $\mathbf{x}(n \times 1)$ es el vector formado por las variables de estado: aquellas que conocidas en el instante inicial junto a la entrada del sistema y el modelo matemático, permiten conocer la evolución del mismo para cualquier instante posterior.
- $\mathbf{u}(r \times 1)$ son las entradas.

Tras operar en el espacio de estados, se requiere calcular las salidas del sistema. Se pueden expresar en función de los estados \mathbf{x} y las entradas \mathbf{u} como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Si hay p salidas, n estados y r entradas:

- $\mathbf{C}(p \times n)$ es la matriz de salida del sistema: combinaciones lineales de los estados.
- $\mathbf{D}(p \times r)$ es la matriz de realimentación.

Se emplea en cálculo numérico.

Un sistema en el espacio de estados sigue la ecuación:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

Si el sistema es lineal:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \sum_{j=1}^n a_{1j}(t) x_j(t) + \sum_{k=1}^r b_{1k}(t) u_k(t) \\ \dot{x}_2 &= \sum_{j=1}^n a_{2j}(t) x_j(t) + \sum_{k=1}^r b_{2k}(t) u_k(t) \\ \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{k=1}^r b_{ik}(t) u_k(t) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= \sum_{j=1}^n a_{nj}(t) x_j(t) + \sum_{k=1}^r b_{nk}(t) u_k(t) \end{cases}$$

Si los coeficientes de A y B son constantes, el sistema es invariante:

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t) \mathbf{x}(t) + B(t) \mathbf{u}(t) \xrightarrow[\substack{a_{ij} \equiv C \\ b_{ik} \equiv C}]{\substack{a_{ij} \equiv C \\ b_{ik} \equiv C}} \dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t)$$

Hallar $\mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, A, B)$ que sea solución de $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$.
Mediante el método del factor integrante:

$$e^{-At}\dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-At}A\mathbf{x}(t) = e^{-At}B\mathbf{u}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-At}\mathbf{x}(t) \right) = e^{-At}B\mathbf{u}(t)$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{-A\tau}\mathbf{x}(\tau) \right) d\tau = \int_0^t e^{-A\tau}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

La parte izquierda se puede resolver como:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{-A\tau}\mathbf{x}(\tau) \right) d\tau = \left[e^{-A\tau}\mathbf{x}(\tau) \right]_0^t = e^{-At}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0$$

y por tanto, $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$

La matriz $\psi(t) = e^{At}$ se emplea para estudiar el transitorio del espacio de estados $x(t)$ y de la evolución de la señal acorde a la entrada u .

Si la exponencial de un número se aproxima a una una serie de potencias:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \dots + \frac{(at)^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{(at)^i}{i!}$$

Para una matriz A **cuadrada**:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{A^i t^i}{i!}$$

Los lenguajes de computación científicos proveen de funciones que implementan algoritmos numéricamente estables para el calculo de la exponencial de una matriz: Python (`scipy.linalg.expm`), MATLAB (`expm`), Julia (`exp`).

Escalar

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \dots$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{-at} = 1/e^{at}$$

$$e^{a(t_1+t_2)} = e^{at_1}e^{at_2}$$

$$e^{t(a_1+a_2)} = e^{ta_1}e^{ta_2}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{at}) = ae^{at}$$

$$\int_0^t e^{a\tau} d\tau = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$$

Matriz

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots \dots$$

$$e^{A0} = I$$

$$e^{-At} = (e^{At})^{-1}$$

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$$

$$e^{t(A_1+A_2)} = e^{tA_1}e^{tA_2} \text{ (sólo si } A_1A_2 = A_2A_1)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$$

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1}(e^{At} - 1) = (e^{At} - 1)A^{-1}$$



5 Sistemas discretos

Si en lugar de tener un sistema continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

se tiene un sistema discreto del que se conocen las entradas $\mathbf{u}(t_k) = u_k$ en diferentes instantes t_k equiespaciados por un tiempo Δt y se quiere conocer la respuesta del sistema en dichos instantes, se puede aprovechar la solución de un sistema lineal invariante mediante el método del factor integrante:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta t}\mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta t} \mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Asumiendo, que mientras no medimos la señal de entrada ($t_k \leq \tau < t_{k+1}$), ésta permanece constante (interpolación *zero-hold*)

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta t} \mathbf{x}_k + \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau \right) B \mathbf{u}_k$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau = -A^{-1} \left[e^{A(t_{k+1}-\tau)} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} = A^{-1} (e^{A\Delta t} - I)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta t} \mathbf{x}_k + A^{-1} (e^{A\Delta t} - I) B \mathbf{u}_k$$

- 6** Sistemas no lineales
 - Aproximación de sistema no lineal
 - Punto de funcionamiento

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

¿Son estos sistemas lineales?

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

¿Son estos sistemas lineales?

$$y = 3x + \pi\dot{x}$$

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

¿Son estos sistemas lineales?

$$y = 3x + \pi\dot{x} \quad \text{Sí}$$

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

¿Son estos sistemas lineales?

$$y = 3x + \pi\dot{x} \quad \text{Sí} \quad y = \sin(x)$$

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

¿Son estos sistemas lineales?

$y = 3x + \pi\dot{x}$ Sí $y = \sin(x)$ No

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

¿Son estos sistemas lineales?

$y = 3x + \pi\dot{x}$	Sí	$y = \sin(x)$	No
$y = \frac{3}{\dot{x}} + e^{-\sqrt{x}}$			

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

¿Son estos sistemas lineales?

$y = 3x + \pi\dot{x}$	Sí	$y = \sin(x)$	No
$y = \frac{3}{\dot{x}} + e^{-\sqrt{x}}$	No		

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

¿Son estos sistemas lineales?

$y = 3x + \pi\dot{x}$	Sí	$y = \sin(x)$	No
$y = \frac{3}{\dot{x}} + e^{-\sqrt{x}}$	No	$y = 3\ddot{x} - 2\dot{x} + x + 10$	

Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

¿Son estos sistemas lineales?

$y = 3x + \pi\dot{x}$	Sí	$y = \sin(x)$	No
$y = \frac{3}{\dot{x}} + e^{-\sqrt{x}}$	No	$y = 3\ddot{x} - 2\dot{x} + x + 10$	Sí

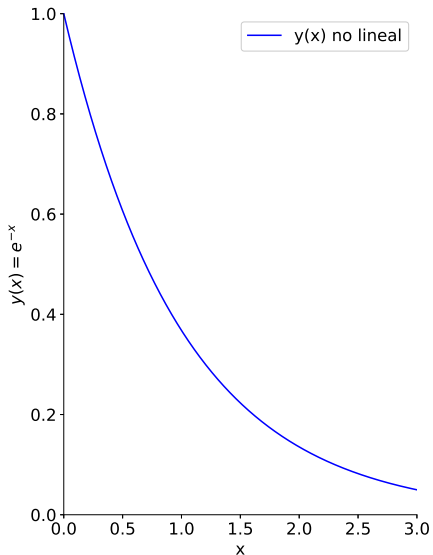
Sistema lineal

- Un sistema es lineal si satisface la propiedad de linealidad
- Un sistema lineal se compone de términos lineales
 - Variable x con constantes: Cx
 - Derivadas de la variable x con constantes: $C_1\dot{x}$, $C_2\ddot{x}$...

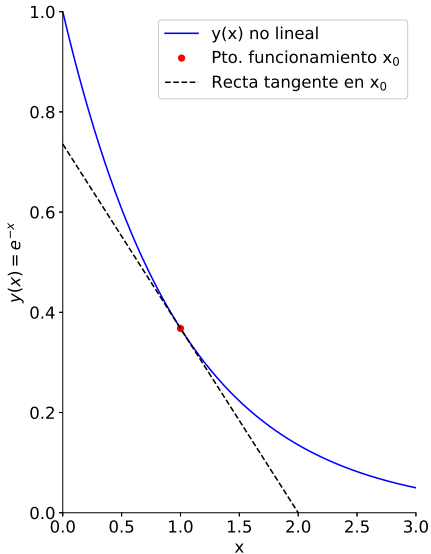
¿Son estos sistemas lineales?

$y = 3x + \pi\dot{x}$	Sí	$y = \sin(x)$	No
$y = \frac{3}{\dot{x}} + e^{-\sqrt{x}}$	No	$y = 3\ddot{x} - 2\dot{x} + x + 10$	Sí

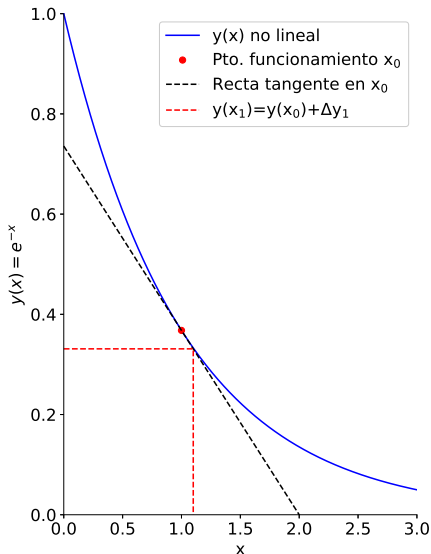
¿Qué hacer ante un sistema no lineal?



■ Término e^{-x}



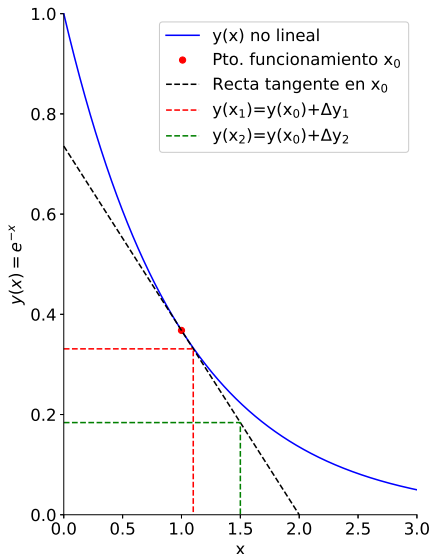
- Término e^{-x}
- Punto de funcionamiento x_0



- Término e^{-x}
- Punto de funcionamiento x_0
- Expresión lineal en torno a x_0 con nueva variable $\Delta x = x - x_0$

$$y(x) \approx y_0 + \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x_0} \Delta x$$

$$e^{-x} \approx e^{-x_0} - e^{-x_0} \Delta x$$



- Término e^{-x}
- Punto de funcionamiento x_0
- Expresión lineal en torno a x_0 con nueva variable $\Delta x = x - x_0$

$$y(x) \approx y_0 + \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x_0} \Delta x$$

$$e^{-x} \approx e^{-x_0} - e^{-x_0} \Delta x$$

- Δx muy elevados introducen error en la predicción

Re-escribir las ecuaciones en $\mathbf{x}(t)$ para $\Delta\mathbf{x}(t)$ a partir de la expresión del espacio de estados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\Delta\mathbf{x}(t), \Delta\mathbf{u}(t), t)$$

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = A'\Delta\mathbf{x}(t) + B'\Delta\mathbf{u}(t)$$

donde:

$$A' = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_0 \quad B' = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)}{\partial \mathbf{u}(t)} \right|_0$$

El punto de funcionamiento viene dado por $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$

El procedimiento anterior se puede simplificar actuando término a término de cada ecuación:

- Sustituyendo las variables por sus incrementos si el término es lineal
- Despreciando los términos con valor constante
- Si un sumando depende de una sola variable x , se sustituye por

$$\left. \frac{df(x(t))}{dx(t)} \right|_{pf} \Delta x(t)$$

- Si depende de más variables, se sustituye por:

$$\sum_i \left. \frac{\partial f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_i(t)} \right|_{pf} \Delta x_i(t) = \left. \frac{\partial f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_1(t)} \right|_{pf} \Delta x_1(t) + \left. \frac{\partial f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_2(t)} \right|_{pf} \Delta x_2(t) + \dots + \left. \frac{\partial f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{\partial x_n(t)} \right|_{pf} \Delta x_n(t)$$

Definición

Periodo de tiempo durante el cual los estados y las entradas no varían

Cálculo del punto de funcionamiento en $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$

- 1 Se define el punto de funcionamiento $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$
- 2 Se sustituye en el sistema $\dot{\mathbf{x}}_0 = f(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t)$
- 3 Los términos que dependan de t se anulan (asociados con $\mathbf{u}(t)$)
- 4 Se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas

Unidad 3 - Modelado Mecánico

Fundamentos de Modelado Aeroespacial
Ingeniería Aeroespacial en Aeronavegación
Ingeniería Aeroespacial en Vehículos Aeroespaciales
Ingeniería Aeroespacial en Transporte y Aeropuertos

Profesores

Agustín Villa Ortiz Alejandro Sáez Mollejo

Curso 2020-2021



Universidad
Rey Juan Carlos

- 1 Introducción
- 2 Sistemas mecánicos de traslación lineal
- 3 Sistemas mecánicos de rotación plana
- 4 Sistemas mecánicos combinados



1 Introducción

Un sistema mecánico es aquel en el que el almacenamiento, transferencia y disipación de la energía vienen dados por las leyes de Newton.

- Su comportamiento se describe mediante vectores de posición, velocidad y fuerzas o momentos
- Se modelan mediante parámetros concentrados ideales: cada uno posee una única propiedad con respecto la energía del sistema
- Almacenamiento de energía mecánica como energía cinética (movimiento) o elástica (deformación)
- Disipación de energía por fricción

	Flujo f	Esfuerzo e	Desplazamiento q	Cantidad de movimiento p
Mecánico lineal	Vel. lineal v	Fuerza F	Posición x	C. de mov. lineal p
Mecánico angular	Vel. angular ω	Momento M	Giro θ	C. de mov. angular L

Un sistema mecánico se modela a partir de las interacciones energéticas de sus elementos

- Estudia cómo varía la energía a través de los elementos
- No tiene por qué parecerse físicamente al sistema mecánico
- Un elemento del sistema se descompone en uno o más elementos en el modelo
- Parámetros concentrados: geometría, materiales, condiciones de operación. . .
- 6 grados de libertad: desplazamientos lineales \mathbf{x} y rotaciones θ

2 Sistemas mecánicos de traslación lineal

- Masa
- Resorte
- Disipación
- Ejemplos de aplicación



- Desplazamientos en línea recta (1D)
- No se consideran las rotaciones de los elementos
- Comportamiento viene dado por desplazamiento \mathbf{x} , velocidad \mathbf{v} y fuerzas \mathbf{F}
- Elementos concentrados *pasivos*: no introducen energía, sólo la almacenan o disipan
- Cada elemento en el modelo está compuesto por una ley constitutiva

En el sistema:

- Propiedad inherente a todos los elementos del sistema
- Ley constitutiva: conservación de la cantidad de movimiento lineal

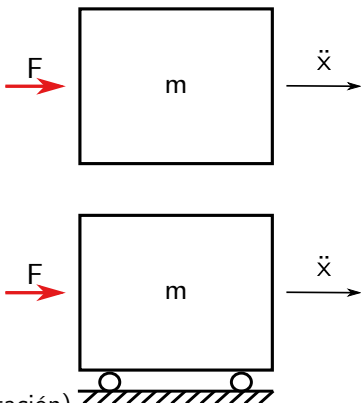
$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = m\ddot{\mathbf{x}}$$

En el modelo:

- **Partícula** / Sólido rígido (si hubiese rotación).
- Almacenamiento de energía cinética y energía potencial

$$\Delta E = W = \int \mathbf{F} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2 + mg\Delta h$$

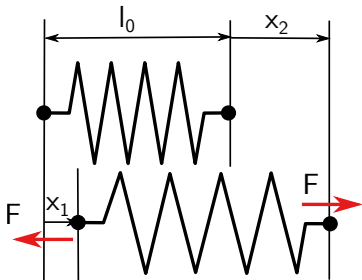
- Sólo se consideran las masas que tienen un papel relevante en el flujo de energía



En el sistema:

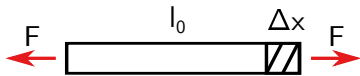
- Muelles y otros elementos con deformaciones elásticas por tracción/compresión
- Ley constitutiva: ley de Hooke

$$\mathbf{F} = k(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = k\Delta\mathbf{x}$$



En el modelo:

- k : rigidez del elemento [N/m]
- F es la fuerza **aplicada sobre** el muelle [N].



- Almacenamiento de energía potencial elástica $E = \int \mathbf{F} d\mathbf{x} = \frac{1}{2}k\|\mathbf{x}\|^2$
- Sólo los elementos que tienen un gran papel en el flujo de energía
- Vibraciones: transformación energía cinética \leftrightarrow elástica

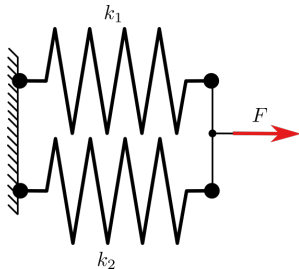
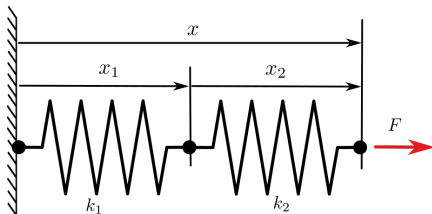
"No sólo los muelles se comportan como muelles".



Recordemos que se trata de un elemento de modelado para representar efectos elásticos.

Ejemplo resortes: serie y paralelo

Calcular la rigidez equivalente (k_e) de los siguientes sistemas:

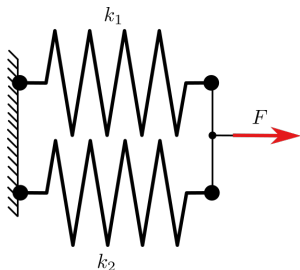
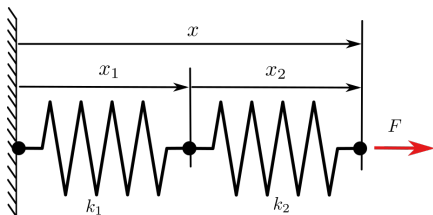


Calcular la rigidez equivalente (k_e) de los siguientes sistemas:

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2$$

$$F = k_e(x_1 + x_2) = k_e x$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

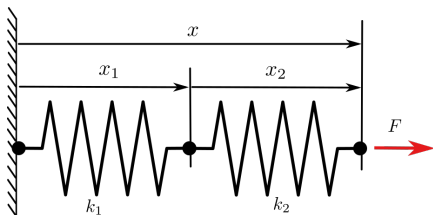


Calcular la rigidez equivalente (k_e) de los siguientes sistemas:

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2$$

$$F = k_e(x_1 + x_2) = k_e x$$

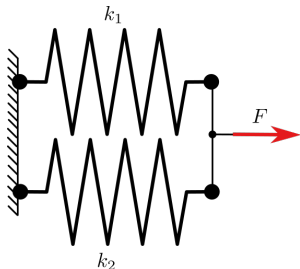
$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$



$$F = k_1 x + k_2 x$$

$$F = (k_1 + k_2)x = k_e x$$

$$k_e = (k_1 + k_2)$$



La energía contenida en un sistema se disipa como calor mediante:

- Esfuerzos viscosos de un fluido
 - Esfuerzo cortante entre sólido - fluido - sólido
 - Esfuerzo por sólido en el seno de un fluido
- Rozamiento entre superficies sólidas
- Deformación plástica

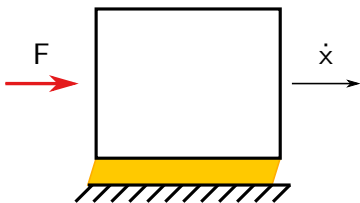
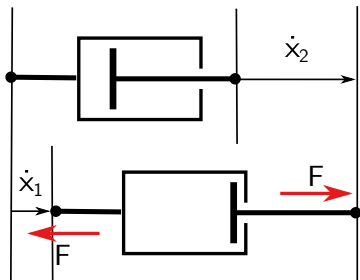
En el sistema:

- Pistones perforados, superficies lubricadas
- Ley constitutiva:

$$\mathbf{F} = b(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = b(\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1)$$

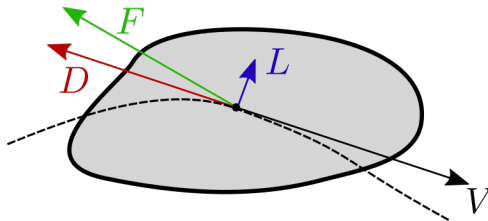
En el modelo:

- b : constante de amortiguamiento [$N \cdot s/m$]
- Disipación de energía $E = \int \mathbf{F} d\mathbf{x}$
- Se consideran los elementos con una disipación importante en el sistema
- Aplicado a flujo por orificios, filtros, conductos ...





- Todo cuerpo que se mueve en un fluido está sometido a una serie de fuerzas debidas a dicho movimiento relativo.
- Esa fuerza tiene su origen en distintos fenómenos físicos como la viscosidad o las diferencias de presiones en distintas regiones.
- Por conveniencia, la fuerza F que el fluido ejerce sobre el cuerpo se descompone en una componente paralela al movimiento D (arrastre) y una perpendicular L (sustentación).



La fuerza de arrastre D siempre se opone al movimiento. Esta fuerza es una función de la velocidad, del tamaño del objeto y del fluido en el que está inmerso. Para objetos “grandes”, moviéndose “rápido”, $D \propto V^2$:

$$D = f(V, \text{tamaño}, \text{forma}, \text{fluido}) = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$$

- ρ : densidad del fluido [kg/m^3]
- V : velocidad del sólido [m/s]
- S : superficie del sólido [m^2]
- C_D : coeficiente de resistencia



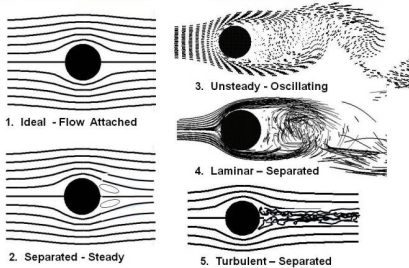
- ¿Qué quiere decir que un objeto sea “*grande*” y que la velocidad sea “*suficientemente rápida*”?
- En Mecánica de Fluidos, los parámetros adimensionales en las ecuaciones de Navier-Stokes permiten despreciar unos fenómenos físicos frente a otros.
- Estos parámetros dependen del tamaño, la velocidad y el fluido.
- Para un “*objeto grande y velocidad suficientemente rápida*”, en rigor, se dice que el número de Reynolds es alto.

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas viscosas}}$$

- ρ : densidad del fluido [kg/m^3]
- V : velocidad del sólido [m/s]
- L : longitud característica del cuerpo [m]
- μ : viscosidad del fluido [$kg/(s \cdot m)$]

National Aeronautics and Space Administration

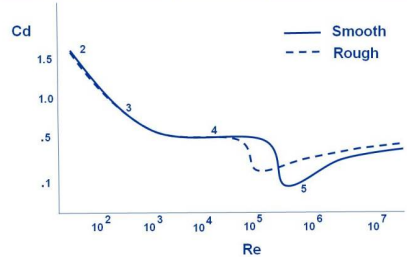
Flow Past a Cylinder



www.nasa.gov

National Aeronautics and Space Administration

Drag of a Sphere



www.nasa.gov

<https://www.grc.nasa.gov/www/K-12/airplane/dragSphere.html>

Velocidad límite

Velocidad que alcanza un cuerpo en el seno de un fluido cuando el arrastre es idéntico a la fuerza aplicada.

¿Te atreves a estimarla en estos dos casos? Primero, se necesita estimar Re



Velocidad que alcanza un cuerpo en el seno de un fluido cuando el arrastre es idéntico a la fuerza aplicada.

¿Te atreves a estimarla en estos dos casos? Primero, se necesita estimar Re

$$Re = \frac{1 \times 0,01 \times 0,01}{0,00002} = 5$$

$$Re = \frac{1 \times 30 \times 1,5}{0,00002} = 2,25 \times 10^6$$



Velocidad que alcanza un cuerpo en el seno de un fluido cuando el arrastre es idéntico a la fuerza aplicada.

¿Te atreves a estimarla en estos dos casos? Primero, se necesita estimar Re

$$Re = \frac{1 \times 0,01 \times 0,01}{0,00002} = 5$$

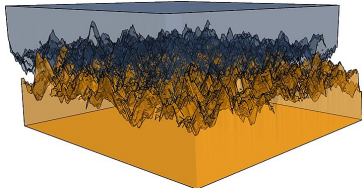
$$Re = \frac{1 \times 30 \times 1,5}{0,00002} = 2,25 \times 10^6$$



Y bastaría con sustituir en su expresión $D = W$

Causada por dos superficies en contacto. El modelo más simple es el de Coulomb:

- Se emplean coeficientes de rozamiento
- Fuerza opuesta al movimiento
- Coeficientes estáticos y dinámicos
- Dificultad de implementar matemáticamente en sistemas de 2^o orden (oscilaciones)

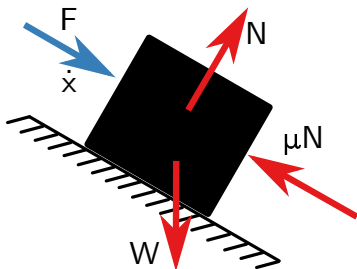
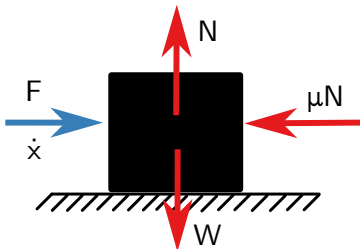


<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=58745249>

- Según el modelo de Coulomb, depende de un coeficiente de fricción entre los dos materiales (μ) y de la fuerza normal (N) a la superficie en contacto.

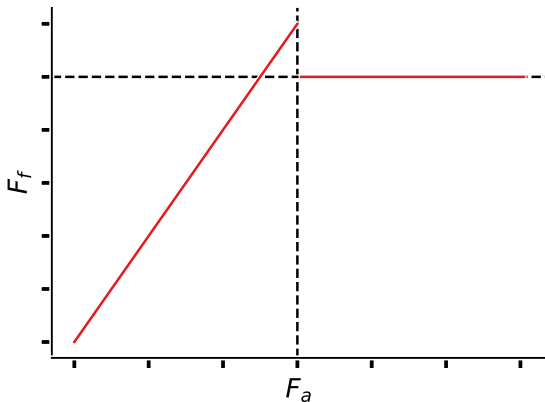
$$F = \mu N$$

- Una vez que comienza el movimiento es habitual diferenciar entre el coeficiente de fricción estático (μ_s) y dinámico (μ_d).



Rozamiento estático y dinámico

- Cuando $F < \mu_s N$, la fuerza de fricción tiene la magnitud de las fuerzas externas aplicadas y sentido contrario. No hay movimiento.
- Cuando se alcanza $F = \mu_s N$, comienza el movimiento.
- A partir de ese momento la fuerza de fricción tiene como módulo $F = \mu_d N$



Materiales	μ_s	μ_d	μ_r
acero-acero	0.7	0.6	0.001-0.002
vidrio-vidrio	0.9	0.4	
teflón-acero	0.04	0.04	
caucho-hormigón	1.0	0.8	0.01-0.02

■ μ_r , fricción por rodadura

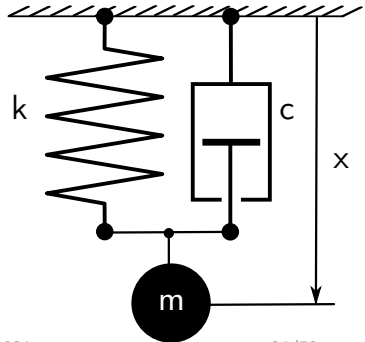
Desde el punto de vista ideal, la fuerza de rozamiento en una rueda que no desliza no realiza trabajo porque es perpendicular al desplazamiento si el contacto es puntual y porque la velocidad relativa entre el punto de contacto y el suelo es 0. Sin embargo, en la realidad, la rueda se deforma y existe una fuerza que frena el movimiento y desgasta la rueda que se puede modelar.

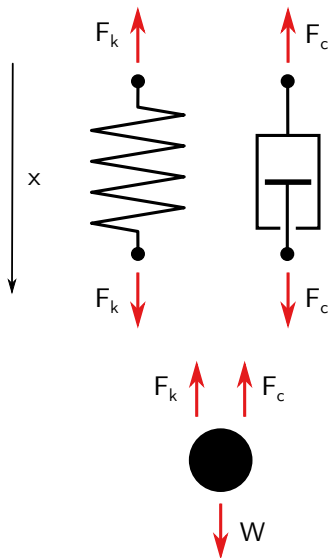


- Al añadir una masa en el extremo del muelle se producen oscilaciones
- Éstas se detienen hasta alcanzar el equilibrio estático
- Disipación a lo largo del muelle

Modelo matemático

¿Qué ecuaciones definen el problema?





- Definir variables de estado: $x(t)$
- Diagrama de cuerpos libres: buscar elementos que posiblemente se mueva
- Almacenamiento de energía de la masa: $m\ddot{x} = \sum F_i$
- Incluir fuerzas aplicadas sobre la masa:
 - $F_i < 0$ si va en contra de x
 - $F_i > 0$ si va a favor de x
- Agrupar los términos convenientemente para resolver por Laplace:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mg$$

o por espacio de estados:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (\dot{x}, x)$$

Definiendo $x = z + \delta_0$, $\dot{z} = \dot{x}$, $\ddot{z} = \ddot{x}$

- Equilibrio de fuerzas:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + k(z + \delta_0) = mg$$

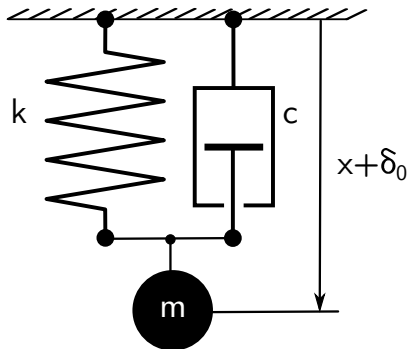
- Condición de equilibrio estático:

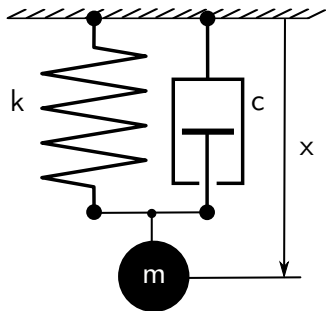
$$k\delta_0 = mg$$

- Perturbaciones alrededor de la condición de equilibrio z_0 , \dot{z}_0 :

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$





$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

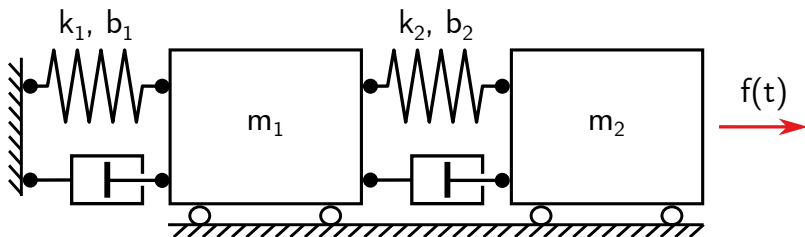
- Transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas

$$\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right) X(s) = \frac{G(s)}{m}$$

- Parámetros característicos ω_n y ζ
- Expresión de $X(s)$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \frac{G(s)}{m} \\ &= \frac{1}{s} \frac{g}{m} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

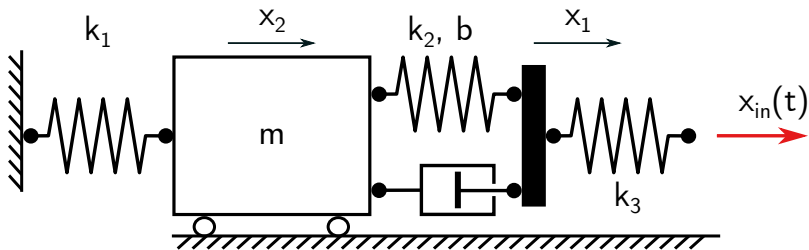
- Expresión temporal de $x(t)$ según ζ



Hallar:

- Ecuaciones diferenciales
- Matriz de transferencia
- Transformada de Laplace de posición de m_1 y m_2
- Representación en el espacio de estados

Ejemplo: masa tirada de muelle



Hallar:

- Ecuaciones diferenciales
- Matriz de transferencia
- Funciones de transferencia $X_1(s)/X_{in}(s)$, $X_2(s)/X_{in}(s)$
- Representación en el espacio de estados

3 Sistemas mecánicos de rotación plana

- Inercia
- Resorte de rotación
- Disipación viscosa
- Ejemplos de aplicación

- Empleado en diseño de máquinas rotatorias (no hay límite en giro)
- Rotación plana sobre un único eje
- No se consideran desplazamientos lineales
- Comportamiento viene dado por ángulo θ , velocidad angular ω y momentos M
- Sistema análogo al de traslación, aunque algo más difícil de conceptualizar
- Cada elemento disipa o almacena energía
- Disipación por fricción entre superficies es despreciable

Distintos sistemas físicos se modelan de forma análoga

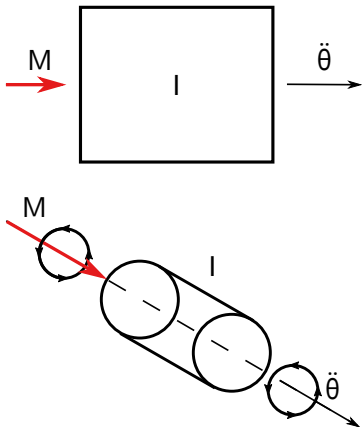
En el sistema:

- Propiedad de un cuerpo al girar sobre un eje
- Se define por su momento de inercia I
- Ley constitutiva: conservación de la cantidad de movimiento angular

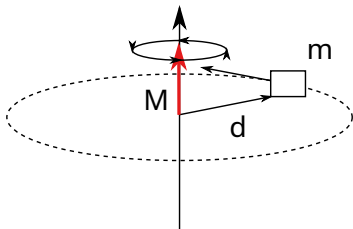
$$M = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\dot{\theta}}{dt} = I\ddot{\theta}$$

En el modelo:

- Sólido rígido
- Almacenamiento de energía cinética $E = M\theta = I\dot{\theta}^2$
- Sólo se consideran las inercias que tienen un gran papel en el flujo de energía



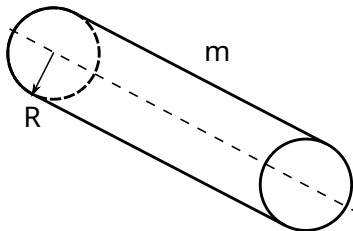
- Masa puntual $I = md^2$



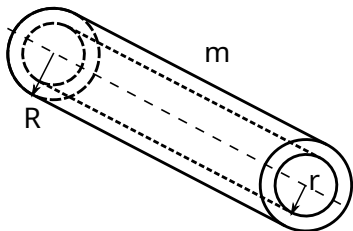
- Teorema de Steiner o de de los ejes paralelos: momento de inercia con respecto un eje paralelo a una distancia d

$$I = I_{\text{cuerpo}} + md^2$$

- Cilindro macizo $I = \frac{1}{2}mR^2$



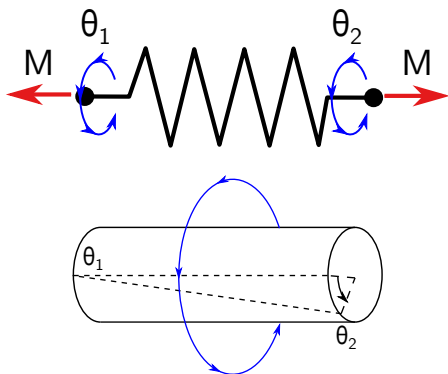
- Cilindro hueco $I = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$



En el sistema:

- Muelles, barras sometidas a torsión
- Deformación elástica
- Ley constitutiva:

$$M = k(\theta_2 - \theta_1) = k\Delta\theta$$

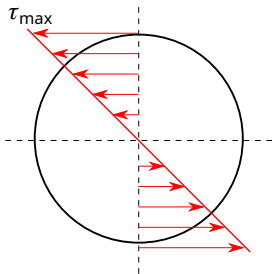


En el modelo:

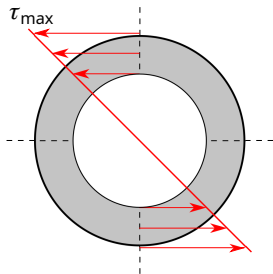
- k : rigidez del elemento a torsión [$N \cdot m$]
- Almacenamiento de energía de deformación $E = \int \mathbf{M}d\theta = \frac{1}{2}k\|\theta\|^2$
- Sólo los elementos que tienen un gran papel en el flujo de energía

La rigidez de un eje se puede calcular como $k = \frac{GJ}{L}$

- G rigidez a cortadura [GPa].
- L longitud del eje [m].
- J momento polar de inercia de la sección transversal [m^4].



Sección circular maciza $J = \frac{1}{2}\pi R^4$

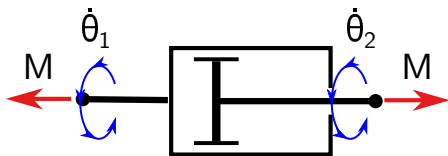


Sección circular hueca
 $J = \frac{1}{2}\pi(R^4 - r^4)$

En el sistema:

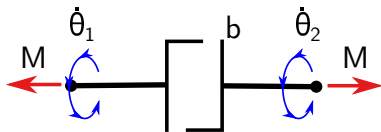
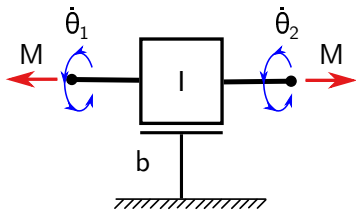
- Esfuerzo cortante entre dos sólidos que rotan sobre el mismo eje
- Ley constitutiva:

$$M = b(\omega_2 - \omega_1) = b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$$



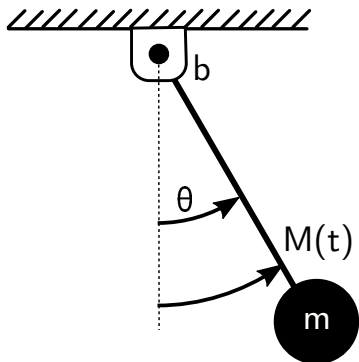
En el modelo:

- b : constante de amortiguamiento [$N \cdot m \cdot s$]
- Disipación de energía $E = M\theta$
- Se consideran los elementos con una disipación importante en el sistema
- Elementos con pérdidas de energía, de soporte estructural y transmisiones de momento



- Soporte estructural
- Movimiento relativo a la máquina

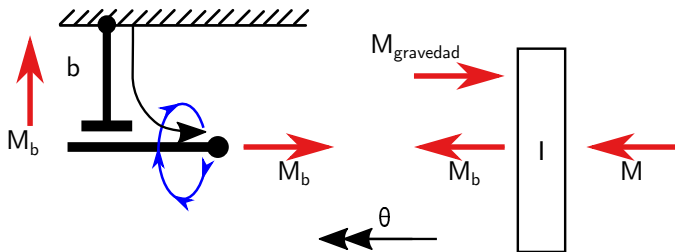
- Transmisión de momento



- Masa puntual m unida a apoyo con barra de masa despreciable de longitud L
 - Cojinete en apoyo: pérdidas con coeficiente de amortiguamiento b
 - Momento aplicado sobre la masa
-
- Variables de estado
 - Dirección de giro
 - Diagrama de cuerpos libres
 - Ecuaciones por cada masa-inercia-nodo
 - Resolver el modelo

Modelo matemático

¿Qué ecuaciones definen el problema?



- Sobre la inercia (masa puntual)

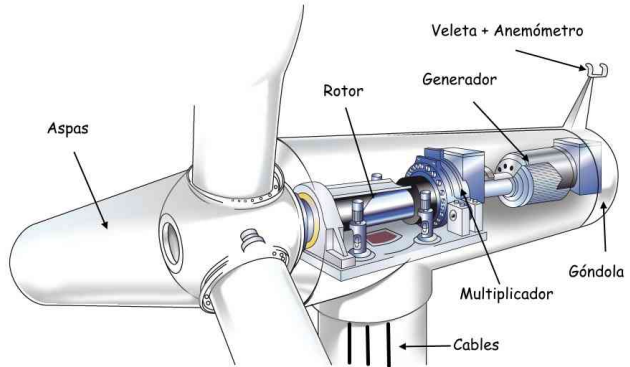
$$I\ddot{\theta} = M_b + M(t) - M_{gravedad}$$

$$mL^2\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - mgL\text{sen}\theta + M(t)$$

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\text{sen}\theta = M(t)$$

- Aproximando $\text{sen } \theta \approx \theta$ para ángulos pequeños

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL\theta = M(t)$$



¿Cómo modelarlo?



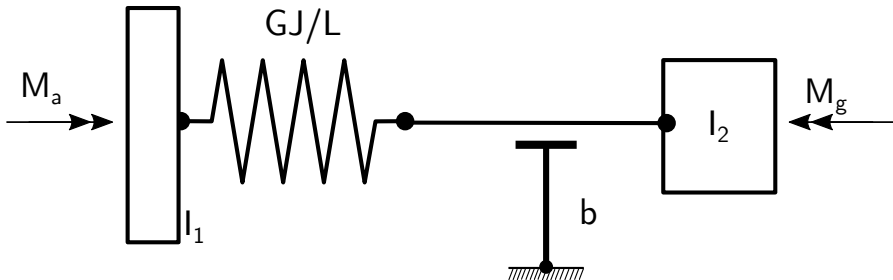
Hipótesis en aerogenerador

El aerogenerador se compone de palas, eje, caja de reductoras, generador.
¿Qué hipótesis se pueden plantear en este sistema para construir nuestro modelo?

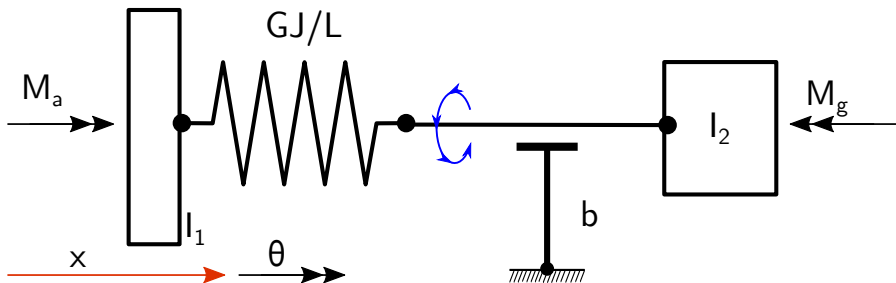
El aerogenerador se compone de palas, eje, caja de reductoras, generador.
¿Qué hipótesis se pueden plantear en este sistema para construir nuestro modelo?

- Las propiedades másicas de las palas se modelan con su momento de inercia I_1
- Se asume conocido el momento aerodinámico que ejerce el viento sobre las palas (M_a)
- El eje de baja velocidad está sometido a torsión plana y con rigidez GJ/L
- En condiciones nominales, la disipación del sistema se concentra en el cojinete hidráulico tras la caja multiplicadora (pérdidas en transmisión despreciables)
- El generador tiene un momento de inercia I_2 y requiere de un momento M_g conocido para producir energía eléctrica

El modelo con dichas condiciones es el siguiente:



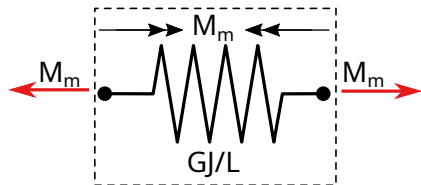
Se elige el sistema de referencia inercial cuyo eje x tiene la dirección del eje del generador y el sentido del giro de las palas.



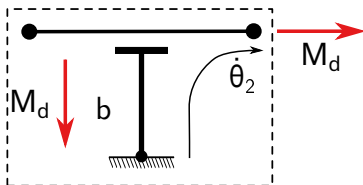
El estado del sistema viene dado por dos variables de estado: θ_1 y θ_2 .

Aislamos los diferentes elementos:

$$M_m = \frac{GJ}{L} (\theta_2 - \theta_1)$$



$$M_d = -b\dot{\theta}_2$$



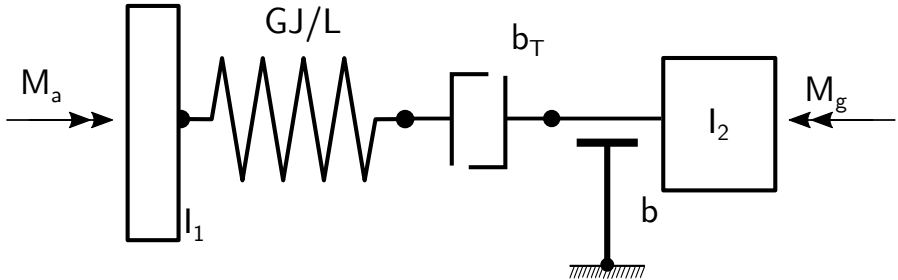
Las ecuaciones en los nodos 1 y 2:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = \frac{GJ}{L} (\theta_2 - \theta_1) + M_a(t)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = -\frac{GJ}{L} (\theta_2 - \theta_1) - b\dot{\theta}_2 - M_g(t)$$

- ¿ $\theta_1, \theta_2 = f(M_a(t), M_g(t))$?
- Espacio de estados

¿Y si se consideran las pérdidas en la caja multiplicadora?



- Espacio de estados

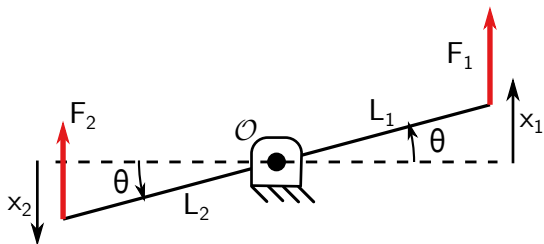
- 4** Sistemas mecánicos combinados
 - Resolución
 - Elementos de transmisión
 - Ejemplos de aplicación

- Traslación y rotación suelen ir combinados en sistemas mecánicos
- Es posible encontrar combinación traslación-traslación o rotación-rotación
- Transmisión de flujos y esfuerzos de un subsistema a otro mediante elementos de transmisión
 - Palanca
 - Engranaje
 - Piñón y cremallera

- Elegir un sistema de referencia inercial para plantear las ecuaciones
- Identificar y aislar los distintos elementos que representarán la física del modelo
- Definir las variables que determinan el movimiento
- Desarrollar las relaciones de transmisión entre elementos
- Representar las fuerzas y momentos actuando en cada uno de los elementos aislados aplicando sus leyes constitutivas
- Aplicar las leyes de conservación a cada nodo
- Combinar las ecuaciones para despejar las variables de interés

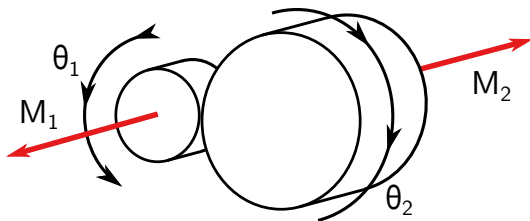
- Traslación-traslación
- Relación giro

$$\text{sen}\theta = \frac{x_1}{L_1} = \frac{x_2}{L_2}$$



- Si no existen pérdidas, la transmisión del trabajo es $F_1 x_1 = F_2 x_2$
- Relación de fuerzas $\frac{F_1}{F_2} = \frac{L_2}{L_1}$
- Equilibrio de momentos sobre el eje O: $I_O \ddot{\theta} = \sum_i M_i$

- Rotación-rotación
- Correas de transmisión o engranajes
- Relación desplazamiento



$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{R}_1\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{R}_2\boldsymbol{\theta}_2$$

$$N_1\boldsymbol{\theta}_1 = N_2\boldsymbol{\theta}_2 \quad (R_i = N_i\Delta)$$

N es el número de dientes y Δ su tamaño.

- Si no existen pérdidas, la transmisión del trabajo es $\mathbf{M}_1\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{M}_2\boldsymbol{\theta}_2$
- Relación de momentos $\frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2}$
- Equilibrio de momentos en engranaje conducido (2):

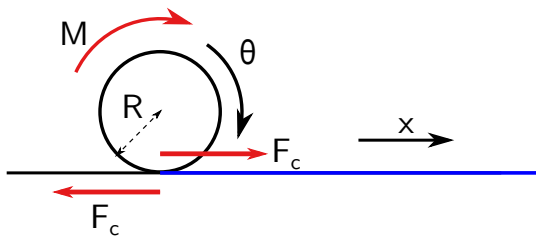
$$I_2\ddot{\boldsymbol{\theta}}_2 = \mathbf{M}_2 = \frac{R_1}{R_2}\mathbf{M}_1 = \frac{N_1}{N_2}\mathbf{M}_1$$

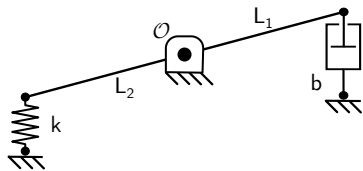
- Transmisión rotación-traslación
- Relación de ligadura

$$x = R\theta$$

- Traslación sin deslizar

- En el punto de contacto existe una fuerza de acción reacción F_c entre el piñón y la cremallera $F_{pc} = -F_{cp}$
- Si no existen pérdidas, la transmisión del trabajo es $M\theta = F_c x$

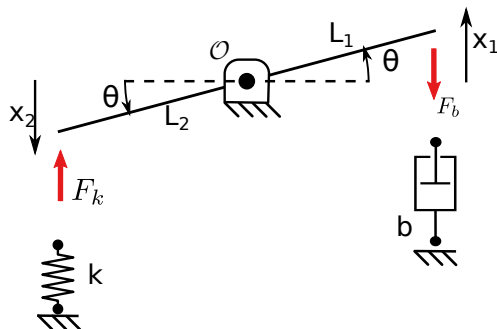




- Plataforma de longitud L , masa m
 - Apoyada en su centro (de masas)
- $$I_O = m \frac{L^2}{12}$$
- Posición inicial en $\theta = 0$

Determinar

- Ecuación del modelo en función del desplazamiento
- Ecuación del modelo en función del giro



- Giro antihorario
- Fuerzas de elementos:

$$F_k = kx_2$$

$$F_b = b\dot{x}_1$$

- Relación de giro
- $$\text{sen}\theta = \frac{x_1}{L_1} = \frac{x_2}{L_2}$$

Equilibrio de momentos causados por las reacciones de la barra:

$$I\ddot{\theta} = -F_b d_1 - F_k d_2$$

$$I\ddot{\theta} = -b\dot{x}_1 L_1 \cos\theta - kx_2 L_2 \cos\theta$$

$$I\ddot{\theta} + b\dot{x}_1 L_1 \cos\theta + kx_2 L_2 \cos\theta = 0$$

$$x_i \approx L_i \operatorname{sen} \theta \qquad \approx L_i \theta$$

$$\dot{x}_i \approx L_i \dot{\theta} \cos \theta \qquad \approx L_i \dot{\theta}$$

$$\ddot{x}_i \approx L_i \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta \right) \approx L_i \ddot{\theta} \cos \theta \qquad \approx L_i \ddot{\theta}$$

Sustituyendo en el equilibrio de momentos

$$I \ddot{\theta} + b L_1^2 \dot{\theta} + k L_2^2 \theta = 0$$

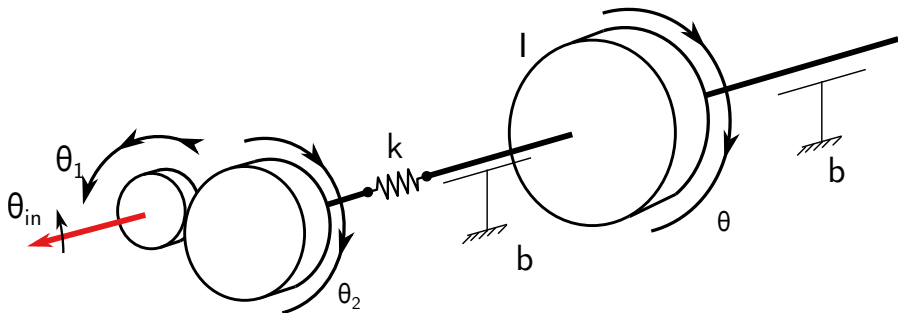
$$\frac{I}{L_1} \ddot{x}_1 + b L_1 \dot{x}_1 + k \frac{L_2^2}{L_1} x_1 = 0$$

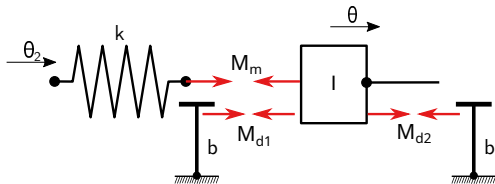
$$\frac{I}{L_2} \ddot{x}_2 + b \frac{L_1^2}{L_2} \dot{x}_2 + k L_2 x_2 = 0$$

- Inercia de engranajes despreciable
- Eje de entrada θ_1 rígido
- Engranajes de radio R_1, R_2

Determinar

- Ecuación del modelo





- Relación desplazamiento:

$$R_1\theta_1 = R_2\theta_2$$

$$\theta_1 = \theta_{in}$$

- Esfuerzos de elementos:

$$M_m = k(\theta - \theta_2)$$

$$M_{d1} = b(\dot{\theta} - 0)$$

$$M_{d2} = b(0 - \dot{\theta})$$

$$I\ddot{\theta} = -M_m - M_{d1} + M_{d2}$$

$$I\ddot{\theta} = -k\theta + k\theta_2 - 2b\dot{\theta}$$

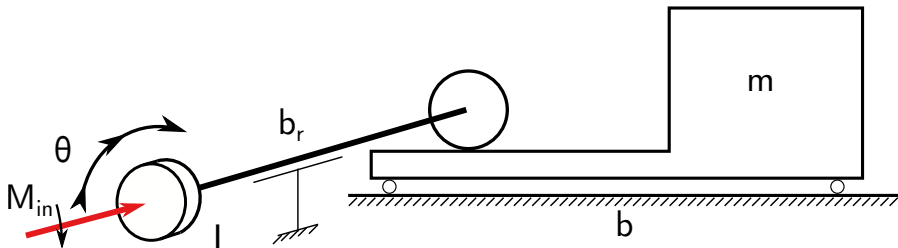
$$I\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + k\theta = k\theta_2 = k\frac{R_1}{R_2}\theta_1 = k\frac{R_1}{R_2}\theta_{in}$$

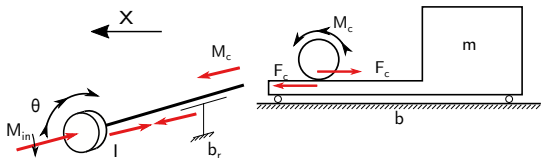
Ejemplo: masa conducida por eje

- Eje motor fijo y rígido
- Masa unida a eje por piñón de radio R y cremallera
- Disipación viscosa sobre superficie

Determinar

- Ecuación del giro del eje
- Ecuación del desplazamiento de la masa





Eje

$$I\ddot{\theta} = M_{in} + M_b - M_c$$

$$I\ddot{\theta} = M_{in} + b_r\dot{\theta} - F_c R$$

Movimiento eje y masa:

$$(I + mR^2)\ddot{\theta} + (b_r + bR^2)\dot{\theta} = M_{in}$$

$$\left(\frac{I}{R} + mR\right)\ddot{x} + \left(\frac{b_r}{R} + bR\right)\dot{x} = M_{in}$$

Masa

$$m\ddot{x} = F_c - F_b$$

$$m\ddot{x} = F_c - b\dot{x}$$

- Fuerza de contacto empuja la masa
- Elementos

$$M_b = b_r(0 - \dot{\theta})$$

$$M_c = F_c R$$

$$F_b = b\dot{x}$$

Unidad 4 - Modelado Fluido

Fundamentos de Modelado Aeroespacial
Ingeniería Aeroespacial en Aeronavegación
Ingeniería Aeroespacial en Vehículos Aeroespaciales
Ingeniería Aeroespacial en Transporte y Aeropuertos

Profesores

Agustín Villa Ortiz Alejandro Sáez Mollejo

Curso 2020-2021



Universidad
Rey Juan Carlos

- 1 Introducción
- 2 Tipos de sistemas fluidos
- 3 Leyes de conservación
- 4 Ejemplos de sistemas fluidos

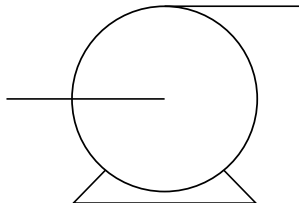
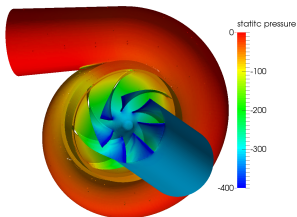
- 1** Introducción
 - Sistemas fluidos
 - Modelado sistemas fluidos
 - Características de un fluido

Aquellos en los que se emplea un fluido para almacenar y transferir energía.

- Se caracterizan mediante la cantidad de masa en un punto y el flujo de la misma gracias a las diferencias de presiones dentro del sistema
- Fluido confinado en depósitos y conductos
- Requieren menos partes móviles que los sistemas mecánicos
- Transferencia de esfuerzos mediante presión, ideales en actuadores mecánicos
- Son más seguros y económicos que los sistemas electromecánicos
- Almacenamiento de energía (potencial gravitatoria, compresión y cinética)

	Flujo f	Esfuerzo e	Desplazamiento q	Cantidad de movimiento p
Sistema fluido	Gasto másico \dot{m}	Presión p	Masa m	C. de mov. de un flujo Γ

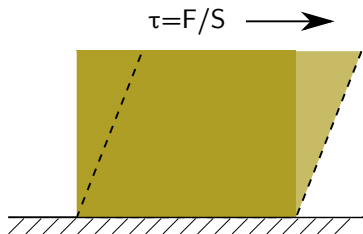
- El modelado de un sistema fluido al detalle requiere de conocimientos de Mecánica de Fluidos, y es bastante costoso
- El modelado macroscópico es más simple al:
 - emplear leyes de conservación
 - relacionar las magnitudes físicas del sistema con los esfuerzos y flujos



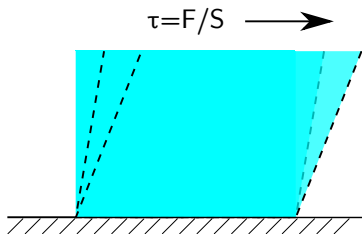
Sustancia que se deforma continuamente al aplicarse un esfuerzo cortante sobre él

Gases Moléculas pequeñas y separadas a gran distancia. Tienen a ocupar todo el espacio disponible. Fácilmente compresibles.

Líquidos Moléculas de mayor tamaño, separadas a menor distancia. Ocupan un volumen finito. Baja compresibilidad. Forman interfaces entre sí.



Sólido



Fluido



Propiedades de un fluido

Densidad ρ [kg/m^3]

Masa por unidad de volumen en unas condiciones conocidas de presión y temperatura

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Coefficiente de expansión térmica α [$1/K$]

Cambio relativo del volumen fluido ante una variación de la temperatura

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$$

Módulo de compresibilidad β [Pa]

Presión necesaria para disminuir en una unidad el volumen fluido

$$\beta = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

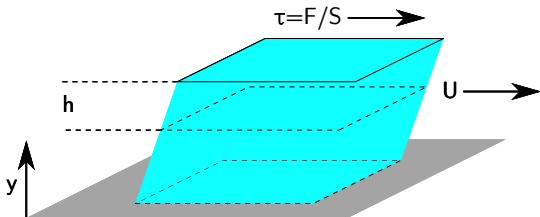
Velocidad de propagación c_0 [m/s]

Velocidad con la que se transmite una onda de presión en el fluido.

$$c_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

Viscosidad μ [$Pa \cdot s$]

- Resistencia que ofrece el fluido al esfuerzo $\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$
- Forma dinámica $\nu = \mu/\rho$ [m^2/s]
- Depende de la temperatura $\mu = f(T)$
- Fluidos Newtonianos ($\mu \neq f(\tau)$) y no Newtonianos ($\mu = f(\tau)$)
- Influencia en tipo de flujo $Re = \rho UL/\mu$

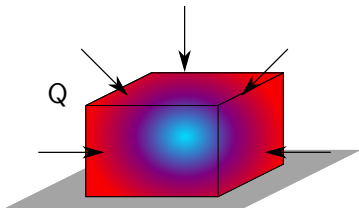


Fluido	μ [$Pa \cdot s$]
Agua	0,001
Aire	0,0000174
Aceite de motor	0,287
Miel	10
Plomo-Bismuto	0,002

Calor específico C [$J/(kg \cdot K)$]

- Calor que requiere un fluido con masa unitaria para incrementar su temperatura un grado
- Definido a volumen C_v ó presión constante C_p
- Depende de la temperatura $C = f(T)$
- Coeficiente de dilatación adiabática $\gamma = c_p/c_v$

{	$\gamma > 1$	Gases
{	$\gamma \approx 1$	Líquidos



- 2 Tipos de sistemas fluidos
 - Sistemas neumáticos del avión
 - Sistemas hidráulicos del avión

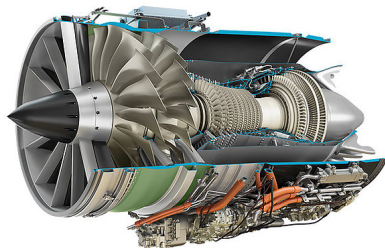
En función del fluido empleado:

Neumáticos El fluido de trabajo es un gas. Las variaciones de presión del mismo afectarán a la densidad a través de las leyes de gas utilizados (en general, ley de gas perfecto).

Hidráulicos El fluido de trabajo es un líquido que consideraremos incompresible o de compresibilidad baja (efectos de módulo de compresibilidad). Su modelo relaciona variaciones de volumen con las variaciones de presión/fuerzas externas.

- Control: retardo en respuesta de sistemas neumáticos por compresibilidad.
- Temperatura de trabajo: los gases pueden trabajar a mayores temperaturas
- Potencia fluida $P = \Delta p \cdot Q$: en sistemas mecánicos con grandes fuerzas, es conveniente emplear líquidos antes que gases (presurización muy elevada).
- Sellado de instalación:
 - Neumáticos** Contaminación de gas o pérdidas por fugas
 - Hidráulicos** Las pérdidas son más sucias y hay riesgo de incendios
- Ruido: los sistemas hidráulicos son más ruidosos
- En aeronáutica, dependiendo del sistema se utilizan unos u otros.

- Emplean gases obtenidos durante la operación del avión
- Un turbofan es un generador de gases presurizados muy eficiente, muchos sistemas del avión toman aire sangrado del motor
- Calentamiento y presurización del aire en cabina
- Sistema de arranque de los motores
- Sistema antihielo (zapatas o calentamiento)
- Presurización de acumuladores
- Accionamiento de bombas del sistema hidráulico
- Instrumentación (pitot)
- Sistemas VTOL



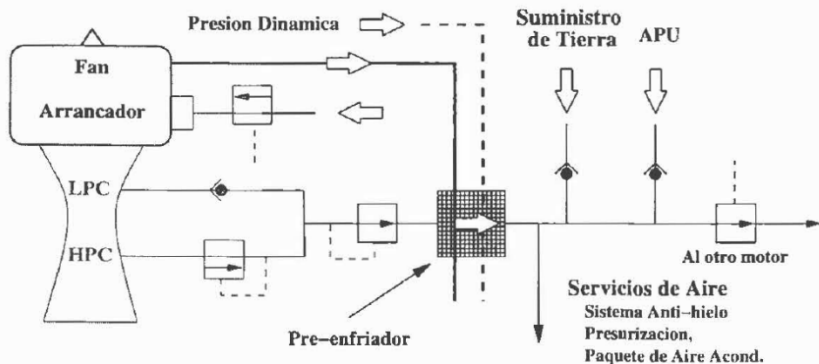
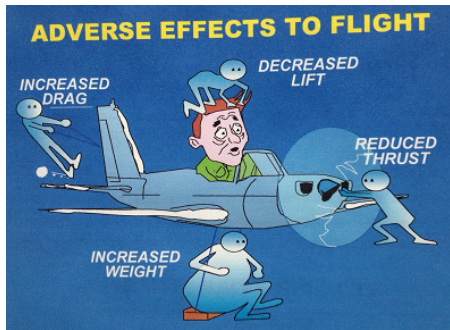
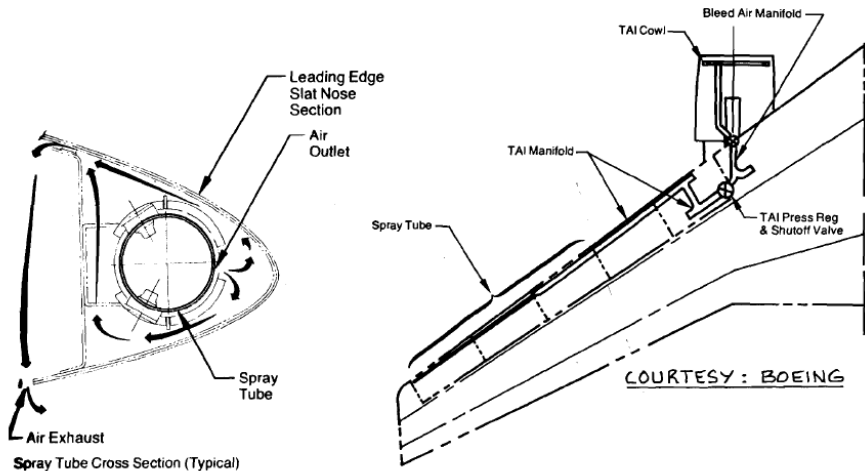


Figure 7.2: Esquema simplificado del Sistema Neumático

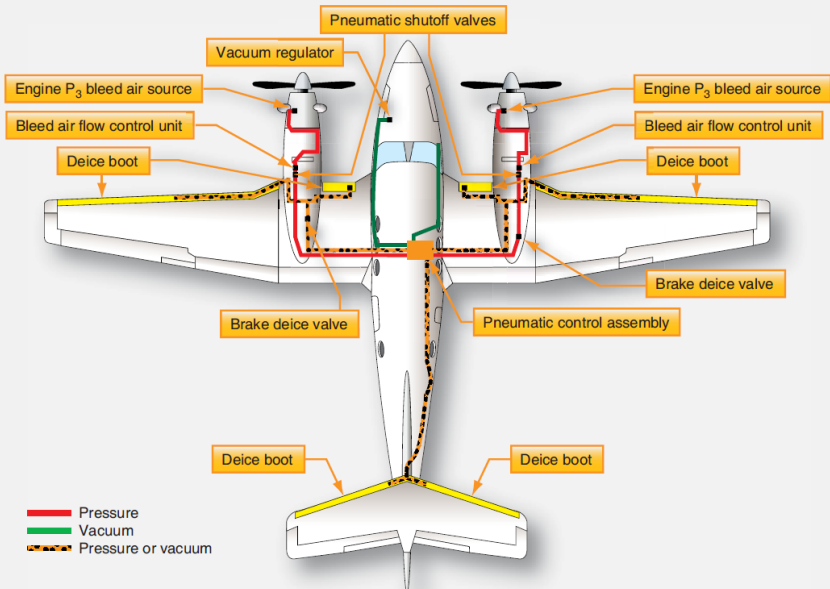
El aire a presión puede provenir, además del motor, de compresores, APU, fuentes en tierra.



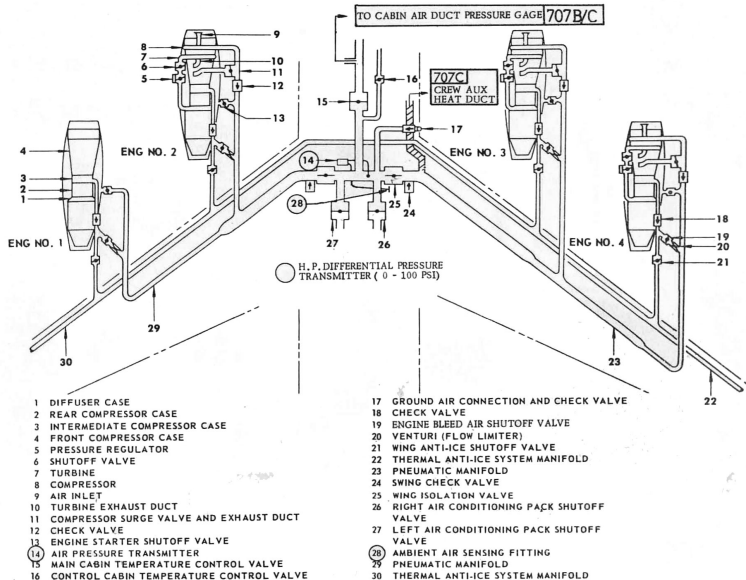
El hielo se acumula en la superficie de la aeronave, influye en el vuelo y en la seguridad



Air Heated Anti-Icing System: Boeing 767



Sistema aire acondicionado



Aparecieron muy pronto en la historia de la aviación y actualmente están en fuerte competencia con los sistemas eléctricos

- Hélices de paso variable
- Actuadores en sistemas de mandos primarios y secundarios
- Sistema de fuel, lubricación

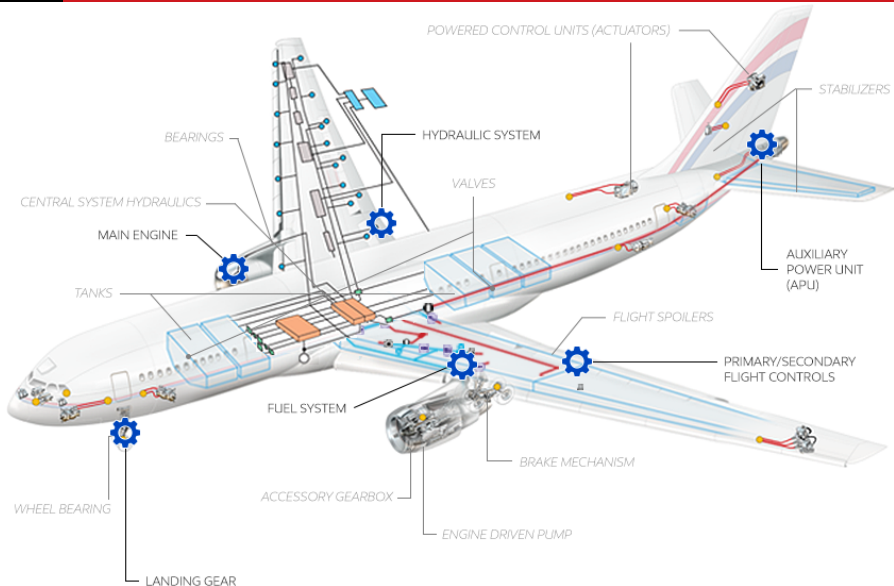
El fluido se presuriza utilizando bombas y acumuladores, se dirige por el sistema por tubos y se controla mediante válvulas



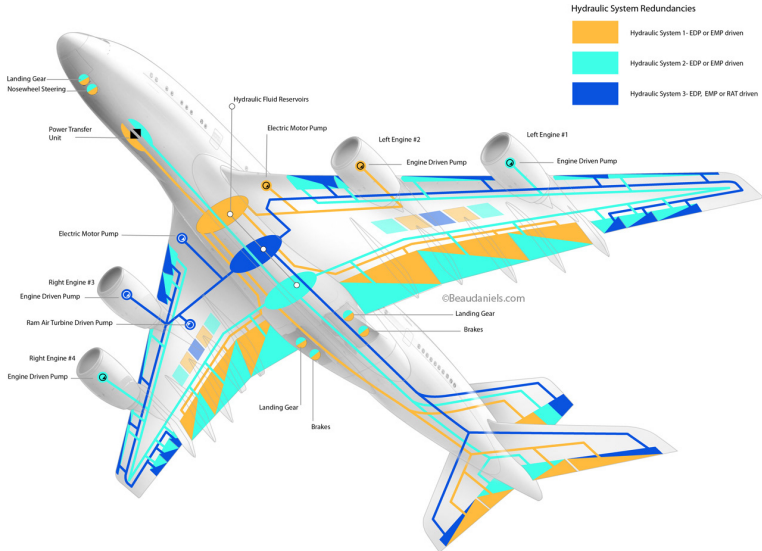
Hélice de paso variable

Bombeo de aceite para regular el paso de las hélices

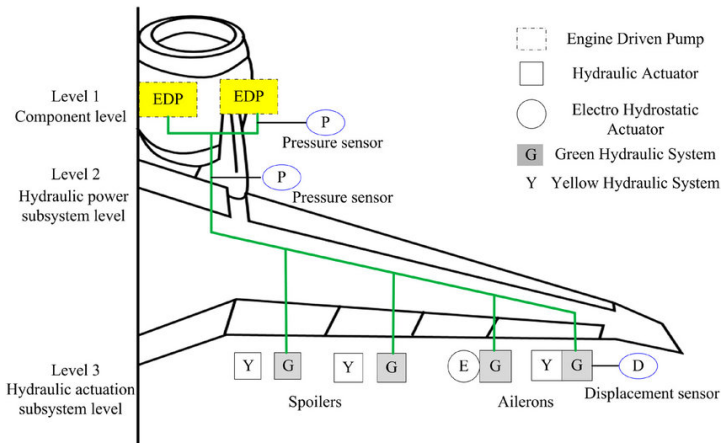
El ángulo de ataque varía acorde a las necesidades de la aeronave

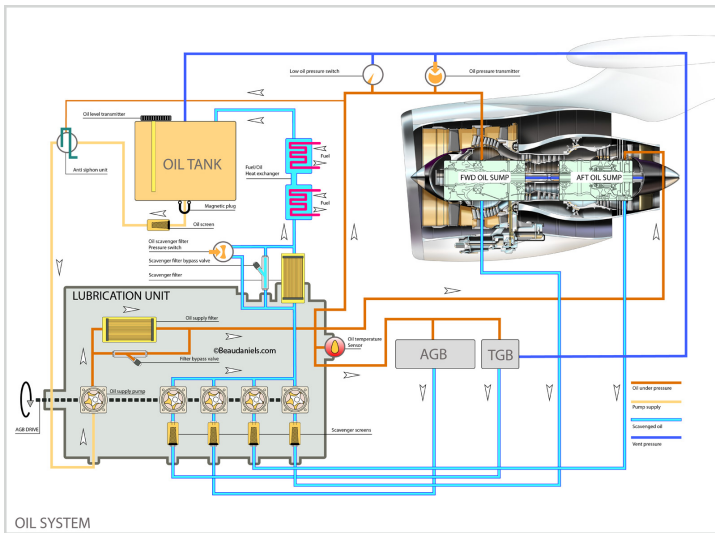


Sistemas redundantes del avión



Evitar pérdida de control durante el vuelo





- 3** Leyes de conservación
 - Ecuaciones de estado
 - Conservación de la masa
 - Conservación de la cantidad de movimiento
 - Conservación de la energía

- **Propiedad** es cualquier característica macroscópica de un sistema medible directa o indirectamente en un instante dado (sin necesidad de conocer la historia anterior).
- **Estado** es el conjunto de propiedades del cual puede derivarse el resto.
- En un sistema fluido, las propiedades fundamentales son:
 - presión (p) [Pa]
 - temperatura (T) [K]
 - densidad (ρ) [kg/m^3]

Ecuación de estado

Relación matemática entre las variables de estado

$$f(p, T, \rho) = 0$$

Ecuación de estado $pV = mR_g^* T$

Al someter al gas a procesos de compresión y expansión se aplica la expresión de proceso politrópico entre dos estados A y B:

$$pV^n = C$$

■ Isobárico $p_A = p_B, n = 0$

$$T_A/T_B = V_A/V_B$$

■ Isotermo $T_A = T_B, n = 1$

$$p_A V_A = p_B V_B$$

■ Isocórico $V_A = V_B, n = \infty$

$$T_A/T_B = p_A/p_B$$

■ Isoentrópico $s_A = s_B, n = \gamma$

$$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$$

La compresibilidad se ve afectada $\beta = -V \frac{\partial p}{\partial V} = np$

* $R_g = 8,314 [J / (mol \cdot K)] / M_m [g/mol]$

$R_{g,aire} = 8,314/28,96 = 0,287 J/g$

En el caso de los líquidos no existen relaciones válidas para un rango grande de valores de sus propiedades. Por tanto, se recurre a linealizaciones en torno a valores de operación:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_0 (p - p_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_0 (T - T_0) \\ &= \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\beta} (p - p_0) - \alpha (T - T_0) \right] \end{aligned}$$

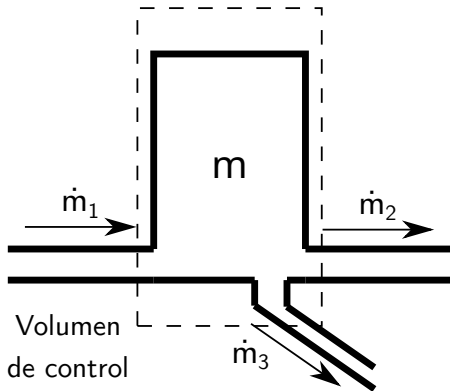
Tiene lugar en los depósitos del sistema fluido.

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_{vc} = \left. \frac{d}{dt} (\rho \cdot V) \right|_{vc} = \frac{d\rho_{vc}}{dt} V_c + \rho_{vc} \frac{dV_c}{dt} = \sum_i \dot{m}_i$$

Si m_i tiene densidad constante, se puede expresar como:

$$\dot{m}_i = \rho_i Q_i$$

Dependiendo de si la densidad o el volumen son constantes, podemos estudiar dos casos más sencillos.



Generalmente en líquidos, almacenan energía gravitatoria $E = mgh$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \sum_i \rho Q_i \rightarrow \frac{dV}{dt} = \sum_i Q_i$$

- Relación volumen-altura depósito

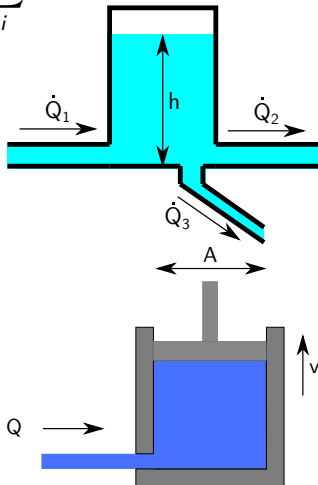
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$$

- Llenado y vaciado de actuadores lineales:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}A \rightarrow Q = \dot{x}A$$

- Llenado de depósitos:

$$V(t) = V_0 + \int_0^t Q(t) dt$$



Conservación de la masa ($V \approx \text{constante}$)

Efectos de compresibilidad (gases), almacena de energía de deformación

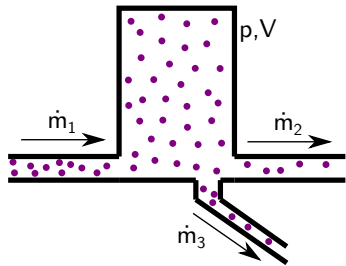
$$V \frac{d\rho}{dt} = \sum_i \rho_i Q_i$$

- Proceso isoterma con gas
($pV = C, \frac{\partial f}{\partial T} = 0$):

$$\beta = \rho_0 \frac{\partial \rho}{\partial p} \rightarrow d\rho = \frac{\rho_0}{\beta} dp$$

$$V \frac{\rho_0}{\beta} \frac{dp}{dt} = \sum_i \rho_i Q_i \rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{\beta}{V} \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_0} Q_i \approx 1$$

- Compresión líquido
($\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\beta} (p - p_0) \right]$)



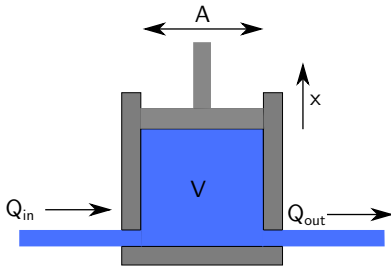
$$\text{Capacitancia } C = \frac{V}{\beta}$$

Líquido en un volumen de control variable y con efectos de compresibilidad:

$$V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = \sum_i \rho_i Q_i$$

$$V \frac{\rho_0}{\beta} \frac{dp}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = \sum_i \rho_i Q_i$$

$$\frac{V}{\beta} \frac{dp}{dt} + \frac{dV}{dt} = \sum_i Q_i \quad (\rho \approx \text{constante})$$



Ejemplo: actuador lineal con compresibilidad

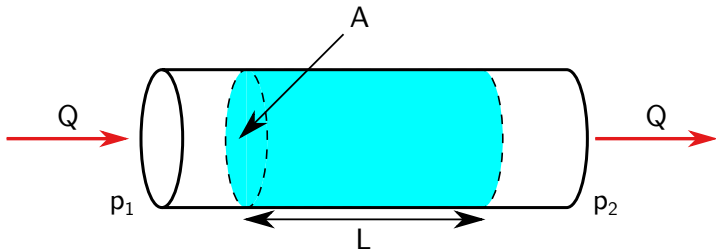
Plantear la ecuación de continuidad para un actuador lineal con área A que tiene un caudal de entrada Q_{in} y uno de salida Q_{out} .

En un conducto de sección constante A y longitud L se expresa como

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_i A p_i^* \rightarrow \frac{dmv}{dt} = \frac{d\rho VQ/A}{dt} = A(p_1 - p_2)$$

$$\frac{\rho L}{A} \frac{dQ}{dt} = p_1 - p_2$$

Almacenamiento de energía cinética en partícula fluida



Inertancia

$$I = \frac{\rho L}{A}$$

Aplicando la 1ª ley de la termodinámica a un volumen de control:

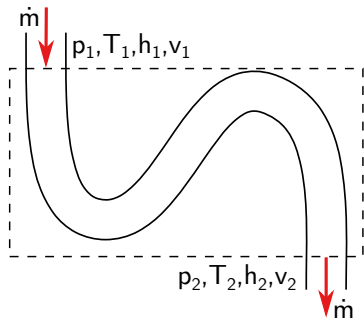
$$\Delta e = \Delta \left(\underbrace{p}_{\text{Compresión}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{E. cinética}} + \underbrace{\rho gh}_{\text{E. pot. grav.}} + \underbrace{c_v T}_{\text{E. interna}} \right) = \sum_i q_i + \sum_j w_j$$

Para un flujo de un fluido en un tubo que:

- sea incompresible $\rho = cte$
- la sección es constante $v = cte$
- no haya aporte externo de calor ni trabajo
- no haya variaciones de altura

$$\Delta p = -c_v \Delta T$$

Las diferencias de presión a lo largo del tubo se transforman en una variación de temperatura por efecto de la fricción.

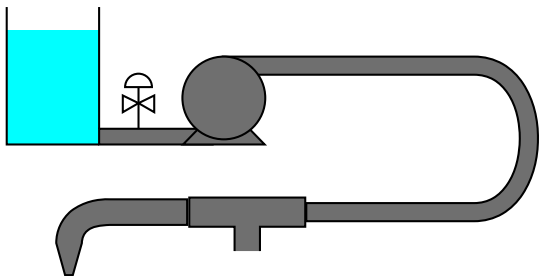


- Se produce una pérdida de carga que se traduce en un aumento de temperatura
- Estas pérdidas se modelan mediante elementos resistivos que disipan la energía del flujo

$$\Delta p = f(\dot{m}, Q)$$

Se producen pérdidas por:

- Fricción de la pared
- Elementos de la instalación:
 - válvulas
 - codos
 - cambios de sección



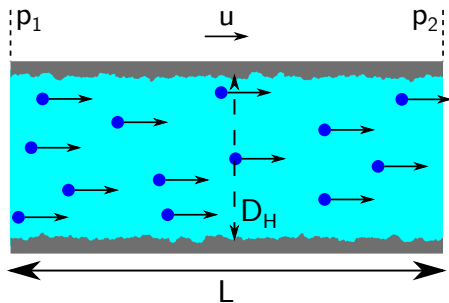
Las pérdidas de un tubo se modelan mediante la ley empírica de :

Ley de Darcy-Weisbach

$$p_1 - p_2 = f \frac{L}{D_H} \frac{\rho \bar{u}^2}{2}$$

- D_H es el diámetro hidráulico
- $f = f(Re, \epsilon)$ es el factor de fricción de Darcy

Las pérdidas dependen del régimen de flujo (laminar o turbulento) y la rugosidad del tubo

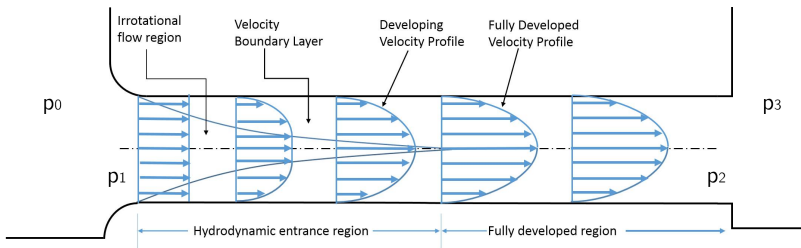


$$Re = \frac{\rho \bar{u} D_H}{\mu}$$

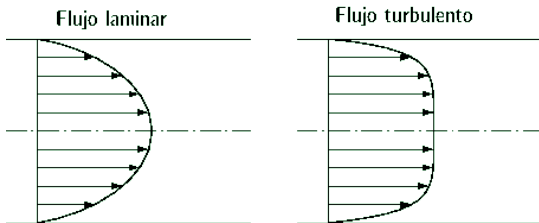
$$D_H = 4 \frac{A}{P}$$

Pérdidas en flujo laminar ($Re < 2000$)

- Solución analítica* para flujo desarrollado, perfil parabólico de velocidad
- Longitud de entrada $L_H = 0,0575 D_H Re$
- El factor de fricción de Darcy es: $f = f(Re) = 64/Re$
- Pérdida de carga lineales $p_1 - p_2 = \frac{128\mu L}{\pi D_H^4} Q = \frac{32\mu L}{D_H^2} \bar{u}$
- Variaciones de temperatura afectan a la viscosidad $\mu = \mu(T)$, y a su vez al tipo de flujo



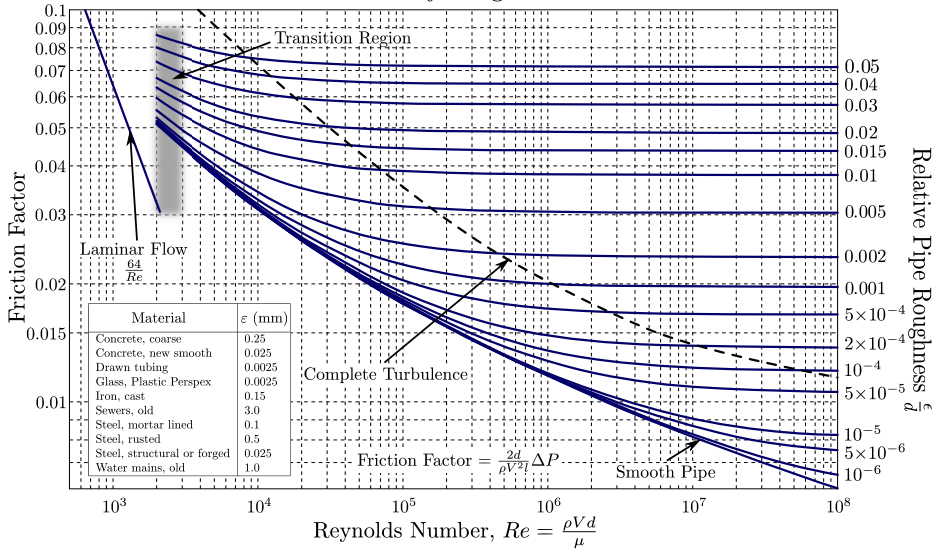
- Factor de fricción en flujo completamente desarrollado
- Longitud de entrada $L_H = 25 - 40D_H$
- El factor de fricción no tiene expresión analítica
- La relación entre la pérdida de carga y la velocidad es cuadrática





Factor de fricción: diagrama de Moody

Moody Diagram



Existen varias aproximaciones dependiendo del Re y ϵ .

$$f(Re, \epsilon) \begin{cases} \text{Blasius } (4000 < Re < 10^5) & f = 0,316Re^{-\frac{1}{4}} \\ \text{Prandtl } (4000 < Re) & \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10}(Re\sqrt{f}) - 0,8 \\ \text{Alta rugosidad flujo turbulento} & \frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log_{10} \left(\frac{\epsilon}{D_H} \right) \end{cases}$$

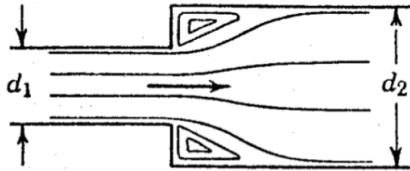
$$p_1 - p_2 = f \frac{L}{D_H} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} = f \frac{L}{D_H} \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 D_H^4}$$

Pérdidas en el flujo adicionales a las propias del conducto

- Válvulas, orificios, medios porosos, cambios de dirección a través de codos. . .
- Se modelan mediante la expresión cuadrática

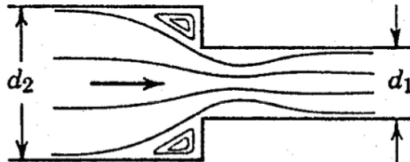
$$\Delta p = KQ^2 \quad \Delta p = k \frac{1}{2} \rho \bar{u}^2$$

- K es el coeficiente de pérdidas $K = f(\text{geometría}, Re)$



$$K = (1 - d_1^2/d_2^2)^2$$

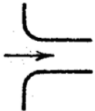
Sudden enlargement



$$K = \frac{1}{2} (1 - d_1/d_2)$$

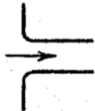
Sudden contraction

Resistance coefficient due to the geometry of pipe entrances and exits with large reservoirs, that is $d_1/d_2 \approx 0$



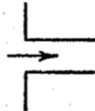
$$K = 0.05$$

Well-rounded
entrance



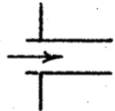
$$K = 0.25$$

Slightly rounded
entrance



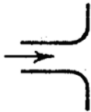
$$K = 0.50$$

Sharp-edged
entrance



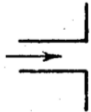
$$K = 0.80$$

Inward projecting
pipe entrance



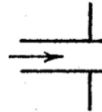
$$K = 1.0$$

Rounded
exit



$$K = 1.0$$

Sharp-edged
exit



$$K = 1.0$$

Projecting
pipe exit

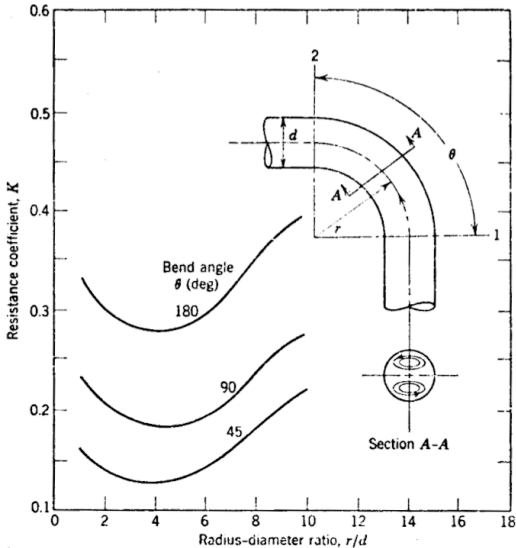
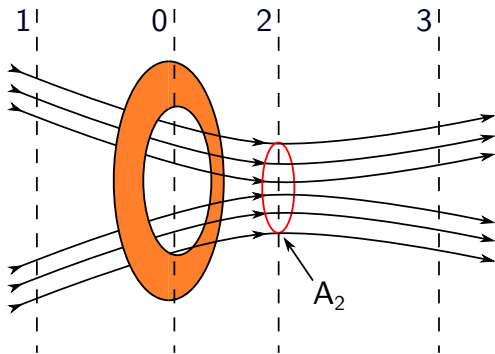


Figure 3-16 Resistance coefficients of pipe bends (from J. J. Taborek, "Fundamentals of Line Flow," *Machine Design Magazine*, April 16, 1959).

- Normalmente en válvulas para controlar la potencia fluida
- Contracción repentina que puede tener área fija o variable
- Presente en flujos turbulentos

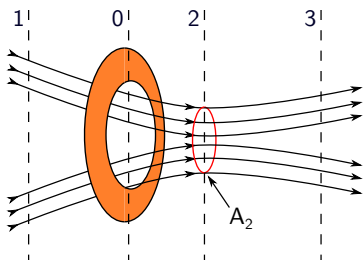


Sección 1: fluido hacia el orificio

Sección 0: orificio

Sección 2: *vena contracta*,
líneas de corriente
muy unidas

Sección 3: flujo vuelve a la
normalidad



- 1 El flujo se acelera en el tramo 1 – 0 – 2
- 2 El chorro se estrecha hasta llegar a 2, con coeficiente de contracción

$$C_c = A_2/A_0$$

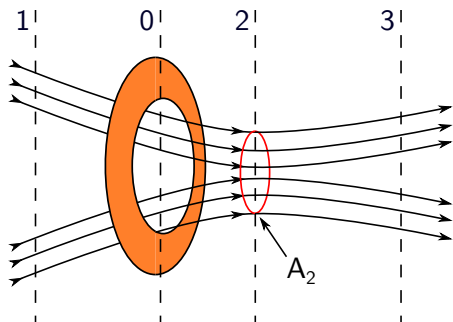
- 3 Ecuación de continuidad

$$Q = A_1 u_1 = A_2 u_2$$

- 4 La ecuación de Bernoulli relaciona la aceleración del fluido con la caída de presión 1 – 2

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2$$

$$u_2^2 = u_1^2 + \frac{2}{\rho} (p_1 - p_2) \xrightarrow{\text{continuidad}} u_2^2 = u_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 + \frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)$$



5 Velocidad en 2:

$$u_2 = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}$$

$$Q = \frac{C_v C_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} A_0 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}$$

$$= C_d A_0 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)}$$

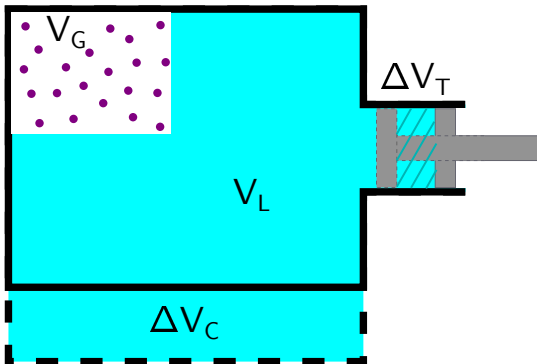
6 El coeficiente de pérdidas resulta en:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{C_d^2 A_0^2} Q^2 = K Q^2$$

$C_v \equiv$ Coeficiente de velocidad: considera pérdidas no indicadas por Bernoulli, ≈ 1

$C_d \equiv$ Coeficiente de descarga

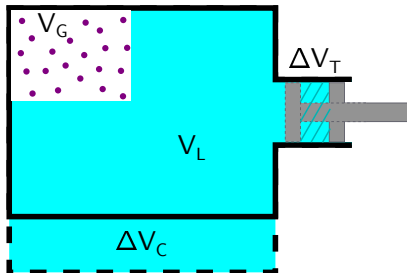
- 4** Ejemplos de sistemas fluidos
 - Depósito de volumen variable
 - Actuador neumático
 - Sistema de depósitos



- Fluidos ocupan volumen inicial V_L , V_G
- Compresibilidad β_L , β_G
- Se aumenta la presión del sistema

¿Compresibilidad del conjunto?

Hallar expresión del módulo de compresibilidad equivalente β_{eq} del sistema

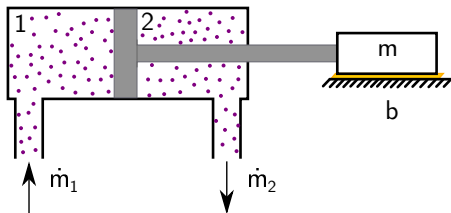


- Volumen inicial $V_T = V_L + V_G$
- Variación de volumen a causa del esfuerzo

$$\Delta V_T = \Delta V_C - \Delta V_L - \Delta V_G$$

- Módulo de compresibilidad $\frac{1}{\beta_{eq}} = \frac{\Delta V_T}{V_T \Delta p} = \frac{\Delta V_C - \Delta V_L - \Delta V_G}{V_T \Delta p}$
- Reorganizando términos $\frac{1}{\beta_{eq}} = \frac{\Delta V_C}{V_T \Delta p} - \frac{V_L}{V_T} \frac{\Delta V_L}{V_L \Delta p} - \frac{V_G}{V_T} \frac{\Delta V_G}{V_G \Delta p}$
- Sustituyendo

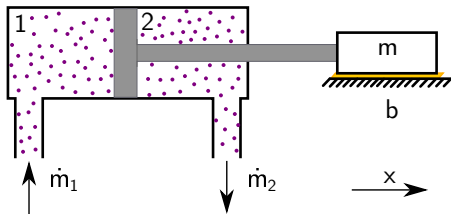
$$\frac{1}{\beta_{eq}} = \frac{\Delta V_C}{V_T \Delta p} + \frac{V_L}{V_T} \frac{1}{\beta_L} + \frac{V_G}{V_T} \frac{1}{\beta_G} = \frac{1}{\beta_C} + \frac{V_L}{V_T} \frac{1}{\beta_L} + \frac{V_G}{V_T} \frac{1}{\beta_G}$$



- Proceso isoterma, gas ideal ρ , β , R
- Volumen inicial $V_{1,0}$, $V_{2,0}$
- Cámaras selladas
- Secciones A_1 , A_2
- Masas agrupadas m
- Gastos máxicos \dot{m}_1 , \dot{m}_2

Ecuaciones del sistema

Determinar ecuaciones de la presión en las cámaras 1 y 2 y del desplazamiento de la carga



Cámara 1 $\frac{dm_1}{dt} = \dot{m}_1$

Cámara 2 $\frac{dm_2}{dt} = -\dot{m}_2$

Masa $\frac{dm\dot{x}}{dt} = F_1 - F_2 - F_b$

- Presiones de las cámaras ejercen fuerzas sobre el pistón
 $F_i = p_i A_i$

- Volumen de cámaras

$$V_1 = V_{1,0} + A_1 x$$

$$V_2 = V_{2,0} - A_2 x$$

- $p_i V_i = m_i R T_i$

Sustituir ecuación de estado en cámaras y presiones en el desplazamiento de la masa

■ Cámara 1: $\frac{dm_1}{dt} = \frac{d\rho_1 V_1}{dt}, \beta_1 = -V_1 \frac{\partial p_1}{\partial V_1} = p_1$

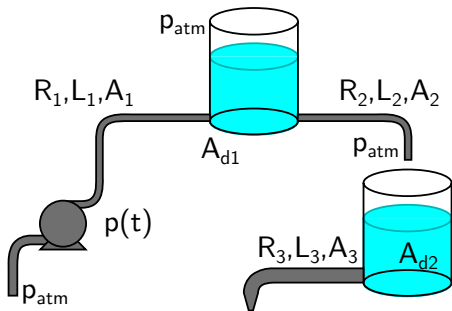
$$(V_{1,0} + A_1 x) \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 A_1 \frac{dx}{dt} = \dot{m}_1 \rightarrow (V_{1,0} + A_1 x) \frac{d\rho_1}{dp_1} \frac{dp_1}{dt} + \rho_1 A_1 \frac{dx}{dt} = \dot{m}_1$$

$$\frac{V_{1,0} + A_1 x}{\beta_1} \rho_1 \frac{dp_1}{dt} + \rho_1 A_1 \frac{dx}{dt} = \dot{m}_1 \rightarrow \frac{V_{1,0} + A_1 x}{RT_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{p_1}{RT_1} A_1 \frac{dx}{dt} = \dot{m}_1$$

■ Cámara 2: $\frac{dm_2}{dt} = \frac{d\rho_2 V_2}{dt}, \beta_2 = -V_2 \frac{\partial p_2}{\partial V_2} = p_2$

$$(V_{2,0} - A_2 x) \frac{d\rho_2}{dt} + \rho_2 A_2 \frac{dx}{dt} = -\dot{m}_2 \rightarrow \frac{V_{2,0} - A_2 x}{RT_2} \frac{dp_2}{dt} + \frac{p_2}{RT_2} A_2 \frac{dx}{dt} = -\dot{m}_2$$

■ Carga: $m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} = p_1 A_1 - p_2 A_2$

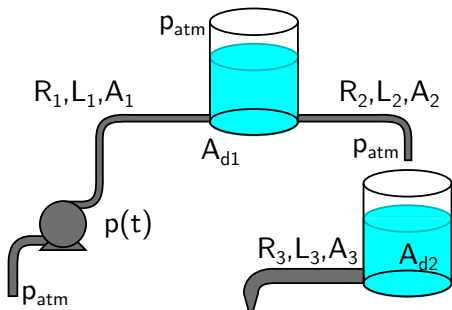


- Agua ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$)
- Flujo laminar, pérdidas lineales
- Depósitos sección constante

Determinar altura de los depósitos

Ecuaciones diferenciales del sistema:

- considerando sólo las pérdidas en líneas
- considerando además la inercia en la línea 2



Presión en nodos:

$$p_1(t) = p_{atm} + p(t)$$

$$p_2(t) = p_{atm} + \rho g h_1(t)$$

$$p_3(t) = p_{atm}$$

$$p_4(t) = p_{atm} + \rho g h_2(t)$$

$$p_5(t) = p_{atm}$$

Pérdidas en líneas:

$$\Delta p_{12} = p(t) - \rho g h_1(t) = R_1 \rho Q_1$$

$$\Delta p_{23} = \rho g h_1(t) = R_2 \rho Q_2$$

$$\Delta p_{45} = \rho g h_2(t) = R_3 \rho Q_3$$

Acumulación en depósitos:

$$A_{d1} \frac{dh_1}{dt} = Q_1 - Q_2$$

$$A_{d2} \frac{dh_2}{dt} = Q_2 - Q_3$$

Sustituyendo los caudales por su relación con las pérdidas de carga:

$$\frac{dh_1}{dt} + \frac{g}{A_{d1}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) h = \frac{p}{\rho A_{d1} R_1}$$

$$\frac{dh_2}{dt} - \frac{g}{A_{d2} R_2} h_1 + \frac{g}{A_{d2} R_3} h_2 = 0$$

Inertancia

¿Cómo se modifican las ecuaciones del sistema?

Unidad 5 - Modelado Térmico

Fundamentos de Modelado Aeroespacial
Ingeniería Aeroespacial en Aeronavegación
Ingeniería Aeroespacial en Vehículos Aeroespaciales
Ingeniería Aeroespacial en Transporte y Aeropuertos

Profesores

Agustín Villa Ortiz Alejandro Sáez Mollejo

Curso 2020-2021



Universidad
Rey Juan Carlos

- 1 Introducción
- 2 Conservación de energía interna
- 3 Transferencia de calor
- 4 Ejemplos de sistemas térmicos

1 Introducción

- Sistemas térmicos
- Leyes de la termodinámica
- Modelado de sistemas térmicos

Aquellos en los que los elementos almacenan y transfieren energía en forma de calor (energía térmica).

- Se caracterizan por el calor retenido en los elementos y su flujo gracias a las diferencias de temperatura dentro del sistema
- Elementos sólidos o fluidos
- Almacenamiento de energía interna en cada elemento
- Flujos de calor mediante diferencias de temperatura
- Obedecen las Leyes de la Termodinámica

	Flujo f	Esfuerzo e	Desplazamiento q	Cantidad de movimiento p
Sistema térmico	Flujo de calor q	Temperatura T	-	-

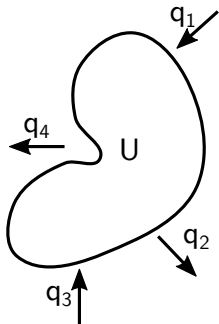
1º Ley de la termodinámica

La conservación de energía interna sin trabajo aplicado de un sistema indica:

$$\Delta U = Q + \cancel{W} = (Q_{int} - Q_{out}) = \sum_i Q_i$$

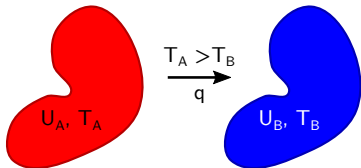
La variación de energía interna dU en un intervalo dt será igual a:

$$\frac{dU}{dt} = \sum_i \frac{dQ_i}{dt} = \sum_i q_i$$

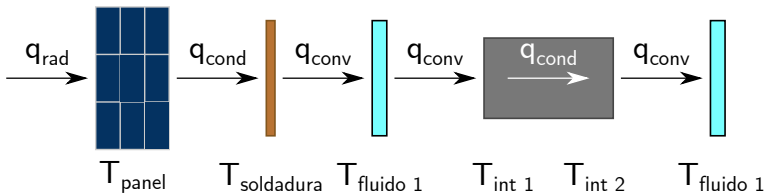
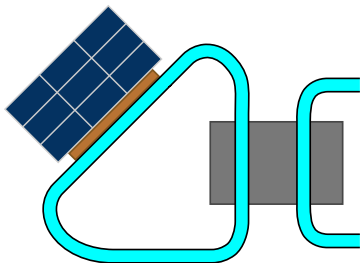


Ley 0 de la termodinámica

Equilibrio térmico entre dos elementos al alcanzar la misma temperatura



- Basados en acumulación de energía interna (calor) por masas puntuales (nodos)
- Transferencia de energía entre cuerpos a distinta temperatura mediante flujos de calor
 - Conducción
 - Convección
 - Radiación





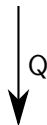
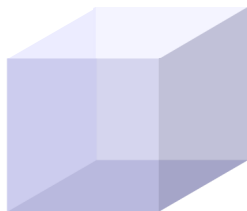
2 Conservación de energía interna

- La conservación de la energía interna $U = mcT$ viene dada por:

$$\frac{dU}{dt} = mc \frac{dT}{dt} = \sum_i q_i$$

- m : masa del cuerpo [kg]
 - c : capacidad específica a presión o volumen constante [$J / (kg \cdot K)$]
- Capacitancia térmica $C = mc$ [J/K]
- Símil con presión (sist. fluido) en un punto

m, c, T_1



m, c, T_2



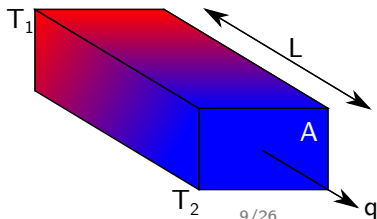
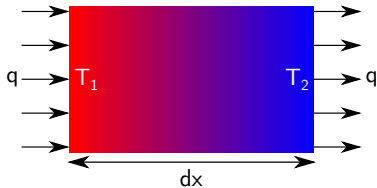
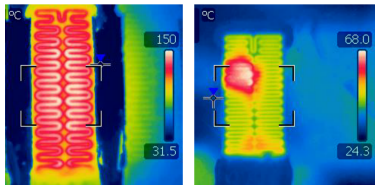
- 3** Transferencia de calor
 - Conducción
 - Convección
 - Radiación
 - Resistencia térmica

- En el seno de un sólido o de un fluido "en reposo"
- Basada en la ley de Fourier:

$$\frac{q}{A} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

- A : sección transversal [m^2]
 - κ : conductividad térmica [$W/(m \cdot K)$]
 - x : dirección del flujo de calor [m]
- Eje de sección constante

$$q = \kappa \frac{A}{L} (T_1 - T_2)$$



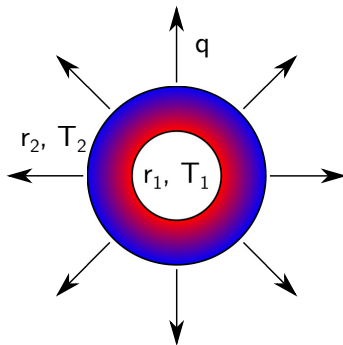
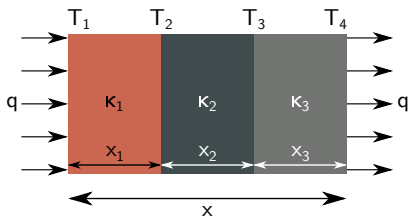
- Capas de distinto material y grosor:

$$q = A\kappa_j \frac{T_i - T_{i+1}}{x_j}$$

el flujo de calor es constante

- Dirección radial en cilindro

$$q = \kappa \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} (T_1 - T_2)$$

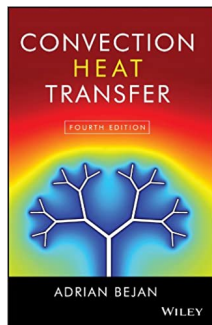
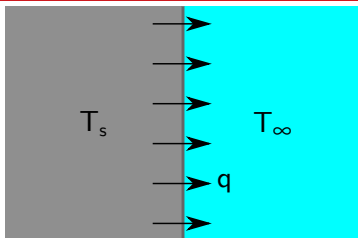


- Interacción fluido y sólido
- Basada en la ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{q}{A} = h(T_s - T_\infty)$$

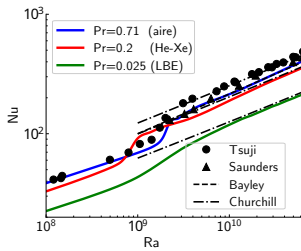
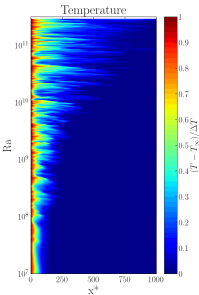
- h : coeficiente convectivo de transferencia de calor [$W / (m^2 \cdot K)$]
 - T_s : temp. de superficie de contacto [K]
 - T_∞ : temp. de referencia del fluido [K]
- Convección forzada o natural, régimen laminar o turbulento
- h se determina analítica o experimentalmente

$$Nu = \frac{hL}{\kappa_f} = f(Re, Gr, Pr, x, \dots)$$



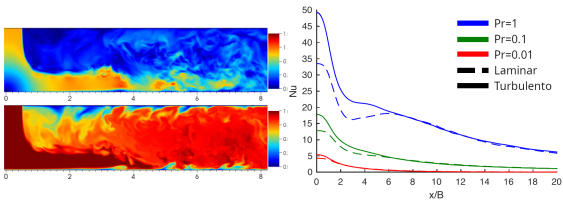
Convección natural

- Flujo conducido por gradientes de densidad
- Intercambio pasivo de calor



Convección forzada

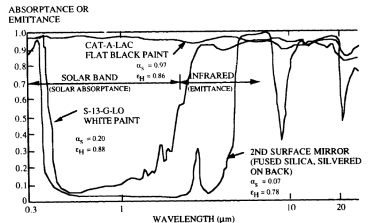
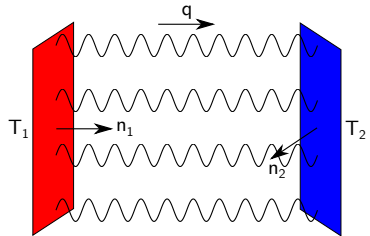
- Flujo producido por fuentes externas
- Más eficiente que la convección natural



- Emisión/recepción de ondas electromagnéticas
- Ley de Stefan-Boltzmann

$$\frac{q}{A} = \varepsilon \sigma F_{12} (T_1^4 - T_2^4)$$

- ε : emisividad [-]
- σ : cte de Stefan-Boltzmann $W / (m^2 K^4)$
- F_{12} : factor de visión
- El flujo de calor depende de los materiales implicados y su disposición
→ área efectiva



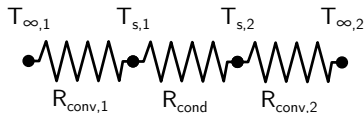
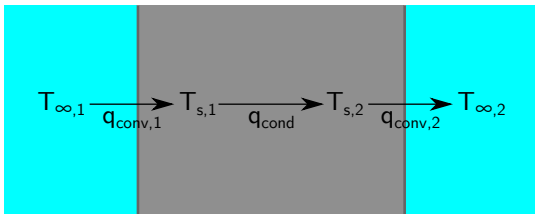
Definición

Ratio del cambio de temperatura con respecto al flujo de calor aplicado

$$R = \frac{dT}{dq}$$

Se aplica en:

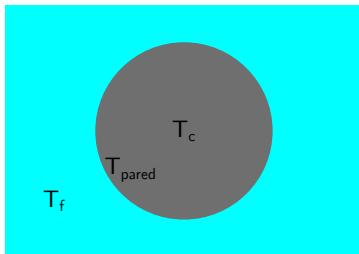
- Medios conductivos $R_{cond} = \frac{L}{A\kappa}, \dots$
- Flujos de calor convectivos $R_{conv} = \frac{1}{Ah}$
- Radiación linealizada $R_{rad} \approx \frac{1}{4A\epsilon\sigma F_{12} T_0^3}$



- ¿Es relevante la conducción interna de un medio? Número de Biot

$$Bi = \frac{hL_c}{\kappa} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}}$$

- $Bi \leq 0,1$ conducción es importante
- $Bi \geq 10$ convección es importante



$$L_c = \frac{V_{cuerpo}}{A_{superficie}}$$

Simplificación del modelo térmico mediante parámetros concentrados

